

# МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»  
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)

## Квазиконформные отображения и их обобщения рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **кафедра математики, физики и информатики**

Учебный план 01.03.01\_2025\_635.plx  
01.03.01 Математика  
Прикладная математика и программирование

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **2 ЗЕТ**

|                         |      |                                        |
|-------------------------|------|----------------------------------------|
| Часов по учебному плану | 72   | Виды контроля в семестрах:<br>зачеты 7 |
| в том числе:            |      |                                        |
| аудиторные занятия      | 36   |                                        |
| самостоятельная работа  | 26,1 |                                        |
| часов на контроль       | 8,85 |                                        |

### Распределение часов дисциплины по семестрам

| Семестр<br>(<Курс>.<Семестр на курсе>)                       | 7 (4.1) |       | Итого |       |
|--------------------------------------------------------------|---------|-------|-------|-------|
| Неделя                                                       | 15 4/6  |       |       |       |
| Вид занятий                                                  | УП      | РП    | УП    | РП    |
| Лекции                                                       | 18      | 18    | 18    | 18    |
| Практические                                                 | 18      | 18    | 18    | 18    |
| Консультации (для студента)                                  | 0,9     | 0,9   | 0,9   | 0,9   |
| Контроль самостоятельной работы при<br>проведении аттестации | 0,15    | 0,15  | 0,15  | 0,15  |
| Итого ауд.                                                   | 36      | 36    | 36    | 36    |
| Контактная работа                                            | 37,05   | 37,05 | 37,05 | 37,05 |
| Сам. работа                                                  | 26,1    | 26,1  | 26,1  | 26,1  |
| Часы на контроль                                             | 8,85    | 8,85  | 8,85  | 8,85  |
| Итого                                                        | 72      | 72    | 72    | 72    |

Программу составил(и):

*к.ф.-м.н., доцент, Туртуева Т.А.*

Рабочая программа дисциплины

**Квазиконформные отображения и их обобщения**

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 8)

составлена на основании учебного плана:

01.03.01 Математика

утвержденного учёным советом вуза от 30.01.2025 протокол № 2.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры

**кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от 10.04.2025 протокол № 10

Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры  
**кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2026 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры  
**кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2027 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2028-2029 учебном году на заседании кафедры  
**кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2028 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

---

---

**Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году**

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для  
исполнения в 2029-2030 учебном году на заседании кафедры  
**кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от \_\_\_\_\_ 2029 г. № \_\_\_\_  
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

**1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.1 | <b>Цели:</b> научное обоснование понятий, изученных ранее в университетском курсе, применение их в процессе решения различных задач; изучение истории развития теории квазиконформных отображений.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 1.2 | <b>Задачи:</b> - развитие общей математической культуры;<br>- теоретическое обоснование основных понятий данного курса;<br>- совершенствование навыков математического и логического мышления.<br>- понимание постановок исследовательских задач в этих областях и осуществление эффективного поиска информации, необходимого для самостоятельной научно-исследовательской работы,<br>- овладение современным аппаратом квазиконформного анализа для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания. |

**2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП**

|                    |                                                                                                              |            |
|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Цикл (раздел) ООП: |                                                                                                              | Б1.В.ДВ.07 |
| <b>2.1</b>         | <b>Требования к предварительной подготовке обучающегося:</b>                                                 |            |
| 2.1.1              | Комплексный анализ                                                                                           |            |
| 2.1.2              | Математический анализ                                                                                        |            |
| <b>2.2</b>         | <b>Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:</b> |            |
| 2.2.1              | Геометрия многообразий                                                                                       |            |

**3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

|                                                                                                                                                                                                                  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <b>ПК-1: Способен организовать учебную деятельность в конкретной предметной области (математика, информатика)</b>                                                                                                |  |
| <b>ИД-4.ПК-1: Владеет методами решения задач элементарной математики соответствующей ступени образования, задач олимпиад, проводит различия между точным и (или) приближенным математическим доказательством</b> |  |
| Владеет методами доказательства теорем, умеет составлять план доказательства и доказывать утверждение с использованием этого плана                                                                               |  |
| <b>ПК-3: Способен математически корректно ставить научные задачи, знает постановки классических исследовательских задач математики</b>                                                                           |  |
| <b>ИД-1.ПК-3: Владеет способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области</b>                                                                                                   |  |
| Знает основные определения и формулировки теорем, относящиеся к области квазиконформных отображений.                                                                                                             |  |
| <b>ИД-2.ПК-3: Умеет строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</b>                                                                                          |  |
| Умеет доказывать утверждения и теоремы в области квазиконформных отображений.                                                                                                                                    |  |
| <b>ИД-3.ПК-3: Умеет публично представлять собственные и известные научные результаты</b>                                                                                                                         |  |
| Владеет способностью составить презентацию, представить результаты с использованием доски и презентации.                                                                                                         |  |

**4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

| Код занятия | Наименование разделов и тем /вид занятия/                                                                                                                   | Семестр / Курс | Часов | Компетенции                                      | Литература       | Инте ракт. | Примечание |
|-------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------|--------------------------------------------------|------------------|------------|------------|
|             | <b>Раздел 1. Отклонения линейного преобразования и их вычисление</b>                                                                                        |                |       |                                                  |                  |            |            |
| 1.1         | 1. Главные растяжения и отклонения линейного преобразования<br>Свойства отклонений<br>2. Оценки для отклонений<br>Полумультимпликативность отклонений /Лек/ | 7              | 4     | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0          |            |

|     |                                                                                                                                                                                                       |   |     |                                                  |                  |   |  |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----|--------------------------------------------------|------------------|---|--|
| 1.2 | 1. Вычисления отклонений в плоскости<br>2. Вычисления отклонений в пространстве<br>/Пр/                                                                                                               | 7 | 4   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 1.3 | 1. Главные растяжения и отклонения линейного преобразования<br>Свойства отклонений<br>2. Оценки для отклонений<br>Полумультимпликативность отклонений<br>/Ср/                                         | 7 | 5   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
|     | <b>Раздел 2. Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов</b>                                                                                                                                       |   |     |                                                  |                  |   |  |
| 2.1 | 1. Определение коэффициентов квазиконформности<br>2. Примеры квазиконформных отображений на плоскости<br>/Лек/                                                                                        | 7 | 4   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 2.2 | 1. Свойства коэффициента квазиконформности<br>Вычисление коэффициентов квазиконформности отображений на плоскости<br>2. Вычисление коэффициентов квазиконформности отображений в пространстве<br>/Пр/ | 7 | 4   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 2.3 | 1. Определение коэффициентов квазиконформности<br>2. Примеры квазиконформных отображений на плоскости<br>/Ср/                                                                                         | 7 | 5   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
|     | <b>Раздел 3. Аналитическое и метрическое определения квазиконформности</b>                                                                                                                            |   |     |                                                  |                  |   |  |
| 3.1 | 1. Стереографическая проекция.<br>Мёбиусово преобразование<br>2. Задача Альфорса-Берлинга<br>Расширение класса квазиконформных отображений<br>/Лек/                                                   | 7 | 4   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 3.2 | Мёбиусово преобразование /Пр/                                                                                                                                                                         | 7 | 4   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 3.3 | 1. Стереографическая проекция.<br>Мёбиусово преобразование<br>2. Задача Альфорса-Берлинга<br>Расширение класса квазиконформных отображений<br>/Ср/                                                    | 7 | 6,1 | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
|     | <b>Раздел 4. Геометрическое определение квазиконформности</b>                                                                                                                                         |   |     |                                                  |                  |   |  |
| 4.1 | 1. Емкости и модули конденсаторов<br>Квазиинвариантность емкости конденсатора<br>2. Вычисление емкостей конденсаторов<br>Свойства емкостей<br>/Лек/                                                   | 7 | 4   | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |

|                                                                    |                                                                                                                                                    |   |      |                                                  |                  |   |  |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------|--------------------------------------------------|------------------|---|--|
| 4.2                                                                | Вычисление емкостей конденсаторов /Пр/                                                                                                             | 7 | 2    | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 4.3                                                                | 1. Емкости и модули конденсаторов<br>Квазиинвариантность емкости конденсатора<br>2. Вычисление емкостей конденсаторов<br>Свойства емкостей<br>/Ср/ | 7 | 5    | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| <b>Раздел 5. Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов</b> |                                                                                                                                                    |   |      |                                                  |                  |   |  |
| 5.1                                                                | 1. Симметризация конденсаторов (упрощенная схема)<br>Лемма Вайсяля<br>Функция Тейхмюллера<br>Принцип симметрии<br>/Лек/                            | 7 | 2    | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 5.2                                                                | 1. Лемма Вайсяля<br>2. Принцип симметрии<br>/Пр/                                                                                                   | 7 | 4    | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| 5.3                                                                | 1. Симметризация конденсаторов (упрощенная схема)<br>Лемма Вайсяля<br>Функция Тейхмюллера<br>Принцип симметрии<br>/Ср/                             | 7 | 5    | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1Л2.1<br>Л2.2 | 0 |  |
| <b>Раздел 6. Консультации</b>                                      |                                                                                                                                                    |   |      |                                                  |                  |   |  |
| 6.1                                                                | Консультация по дисциплине /Конс/                                                                                                                  | 7 | 0,9  | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1             | 0 |  |
| <b>Раздел 7. Промежуточная аттестация (зачёт)</b>                  |                                                                                                                                                    |   |      |                                                  |                  |   |  |
| 7.1                                                                | Подготовка к зачёту /Зачёт/                                                                                                                        | 7 | 8,85 | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1             | 0 |  |
| 7.2                                                                | Контактная работа /КСРАтт/                                                                                                                         | 7 | 0,15 | ИД-1.ПК-3<br>ИД-2.ПК-3<br>ИД-3.ПК-3<br>ИД-4.ПК-1 | Л1.1             | 0 |  |

## 5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины.
2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения входного контроля, текущего контроля 1 и 2 в форме тестов и контрольной работы, а также примерный перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации в форме зачета.

### 5.2. Оценочные средства для текущего контроля

В приложении приведены контрольные материалы для проведения входного контроля, текущего контроля 1 и 2, а также итоговый тест и вопросы для проведения промежуточной аттестации в форме зачета

### 5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Темы письменных работ по данному предмету не предусмотрены.

### 5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Перечень вопросов к зачету

1. Главные растяжения отклонения линейного преобразования.  
Алгоритм вычисления главных растяжений. Отклонения линейного преобразования. Элементарные свойства отклонений.

2. Отклонения линейного преобразования. Вычисление отклонений линейного преобразования плоскости.
  3. Отклонения линейного преобразования в  $R^n$ . Оценки для отклонений.
  4. Отклонения линейного преобразования в  $R^n$ . Оценки для отклонений. Полумультпликативность отклонений.
  5. Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов в  $R^n$ . Понятие квазиконформного отображения. Свойства коэффициентов квазиконформности.
  6. Доказать, что на плоскости понятие 1-квазиконформного отображения и конформного преобразования совпадают.
  7. Инверсия относительно сферы в  $R^n$ . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования инверсии.
  8. Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования закручивания двугранного клина в  $R^3$  вокруг его ребра.
  9. Радиальное отображение единичного шара в  $R^3$ . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования растяжения.
  10. Стереографическая проекция пространства  $R^n$ . Определение мебиусова пространства  $R^n$ , понятие обобщенной сферы и инверсии относительно обобщенной сферы. Геометрические свойства инверсии.
  11. Мебиусово преобразование пространства  $R^n$ , свойства. Примеры.
  12. Мебиусово преобразование пространства  $R^n$
- Конформные и антиконформные преобразования областей пространства  $R^n$  (случай  $n=2$  и случай  $n>2$ ). Теорема Лиувилля.
13. Задача Альфорса-Берлинга и ее решение. Понятие квазисимметрической функции.
  14. Метрическое определение квазиконформного отображения, его геометрический смысл. Показать, что квазиконформный диффеоморфизм является квазиконформным в смысле метрического определения квазиконформного отображения.
  15. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства.
  16. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства. Абсолютно непрерывное отображение на  $n$ -мерном сегменте в  $R^n$ . Класс отображений ACL в области  $D$  пространства  $R^n$ . Свойства класса ACL. Отображения класса  $ACL_n, ACL_n, loc$ .
  17. Аналитическое определение квазиконформности. Теорема сходимости. Теорема компактности.
  18. Конденсатор кольцевой в  $R^n$ . Емкость и модуль конденсатора. Емкость шарового слоя
  19. Квазиинвариантность емкости кольцевого конденсатора
  20. Геометрическое определение квазиконформности. Вычисление емкости цилиндра, основания которого служат пластинами конденсатора.
  21. Вычисление емкости цилиндрического слоя, боковые поверхности которого служат пластинами конденсатора. Емкость провода.
  22. Симметризация конденсатора, основная теорема симметризации Геринга
  23. Лемма Вайсяля. Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов
  24. Кольцо Тейхмюллера, функция Тейхмюллера, ее свойства. Нижняя оценка для емкости кольцевого конденсатора через функцию Тейхмюллера.
  25. Абсолютное двойное отношение четверки точек в  $R^n$ . Мебиусова инвариантность абсолютного двойного отношения. Критерий мебиусовости гомеоморфизма  $R^n$  в терминах абсолютного двойного отношения.

Критерии оценки:

"Зачтено":

- студент знает формулировки определений, вынесенных на зачет;
- студент знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет;

"Не зачтено":

- студент не знает формулировки определений, вынесенных на зачет;
- студент не знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет;

Контрольные тесты и задания

Вопрос 1. (ПК-1) На плоскости  $R^2$  для линейного преобразования  $A: R^2 \rightarrow R^2$  линейное, внешнее и внутреннее отклонения совпадают.

Верно

Неверно

Ключ: верно.

Вопрос 2. (ПК-1) Дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя

Верно

Неверно

Ключ: верно.

Вопрос 3. (ПК-1) Конформное отображение обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов?

Ключ: да

Вопрос 4. (ПК-1) Как записываются условия Коши-Римана для аналитической функции  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ?

- а)  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$   
 б).  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$   
 в).  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$   
 г).  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

Ключ: б.

Вопрос 1. (ПК-3) Каков коэффициент квазиконформности композиции  $K_1$ -квазиконформного и  $K_2$ -квазиконформного отображений?

- а)  $K_1 \cdot K_2$   
 б)  $K_1 + K_2$   
 в)  $\frac{K_1}{K_2}$   
 г)  $K_1 - K_2$

Ключ: а.

Вопрос 2. (ПК-3) 1-квазиконформными отображениями в пространстве  $\mathbb{R}^n$  не являются:

- а) гомотетия  
 б) перенос на вектор  
 в) отражение относительно гиперплоскости  
 г) отображение квадрата на прямоугольную область

Ключ: г.

Вопрос 3. (ПК-3) Отображение  $f: D \rightarrow D'$  областей в  $\mathbb{R}^n$  называется диффеоморфизмом, если ...

- а)  $f$  гомеоморфизм  
 б)  $f$  гомеоморфизм,  $f, f^{-1}$  дифференцируемы  
 в)  $f$  дифференцируемо.  
 г)  $f^{-1}$  дифференцируемо.

Ключ: б.

Вопрос 4. (ПК-3) Задача об отыскании наиболее близкого к конформному отображения одного прямоугольника на другой с соответствием вершин -- это известная задача ...

- а) Альфорса-Берлинга  
 б) Бельтрами  
 в) Греча  
 г) Тейхмюллера

Ключ: в.

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

### 6.1. Рекомендуемая литература

#### 6.1.1. Основная литература

|      | Авторы, составители         | Заглавие                                     | Издательство, год             | Эл. адрес                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------|-----------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Л1.1 | Асеев В. В., Туртуева Т. А. | Квазиконформные отображения: учебное пособие | Горно-Алтайск: БИЦ ГАГУ, 2024 | <a href="https://elibr.gasu.ru/index.php?option=com_abook&amp;view=book&amp;id=5611:1181&amp;catid=5:mathematics&amp;Itemid=163">https://elibr.gasu.ru/index.php?option=com_abook&amp;view=book&amp;id=5611:1181&amp;catid=5:mathematics&amp;Itemid=163</a> |

#### 6.1.2. Дополнительная литература

|      | Авторы, составители | Заглавие                                                                                                                   | Издательство, год            | Эл. адрес |
|------|---------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|-----------|
| Л2.1 | Боярчук А.К.        | Справочное пособие по высшей математике. Т.4. Функции комплексного переменного: теория и практика: в 4-х томах: справочник | Москва: Едиториал УРСС, 2004 |           |
| Л2.2 | Шабат Б.В.          | Введение в комплексный анализ. Т.1. Функции одного переменного: в 2 т.: учебник для университетов                          | Москва: Наука, 1985          |           |

### 6.3.1 Перечень программного обеспечения

|         |                                                     |
|---------|-----------------------------------------------------|
| 6.3.1.1 | Moodle                                              |
| 6.3.1.2 | Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ |
| 6.3.1.3 | MS Office                                           |
| 6.3.1.4 | NVDA                                                |

|                                                        |                                                                                     |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 6.3.1.5                                                | LibreOffice                                                                         |
| 6.3.1.6                                                | MS Windows                                                                          |
| 6.3.1.7                                                | РЕД ОС                                                                              |
| 6.3.1.8                                                | Яндекс.Браузер                                                                      |
| <b>6.3.2 Перечень информационных справочных систем</b> |                                                                                     |
| 6.3.2.1                                                | База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета» |
| 6.3.2.2                                                | Электронно-библиотечная система IPRbooks                                            |
| 6.3.2.3                                                | Межвузовская электронная библиотека                                                 |

| <b>7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ</b> |                   |  |
|--------------------------------------|-------------------|--|
|                                      | проблемная лекция |  |
|                                      | конференция       |  |

| <b>8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Номер аудитории                                                   | Назначение                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Основное оснащение                                                                                                                                                               |
| 209 Б1                                                            | Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы                        | Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет |
| 211 Б1                                                            | Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы                        | Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), компьютеры с доступом к Интернет                                                          |
| 201 Б1                                                            | Кабинет методики преподавания информатики. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы | Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор. Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), компьютеры с доступом к Интернет |

| <b>9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Методические указания по освоению дисциплин (модулей)</p> <p>Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.</p> <p>Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у студентов, усвоивших материал всех предыдущих лекций. Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.</p> <p>Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где студент может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на</p> |

них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.

Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.

Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа студентов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал, студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.

Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы. Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.

Подобрав, отработав материал и усвоив его, студент должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.

По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).

Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.

Текущий контроль учебных достижений по результатам выполнения лабораторных работ проводится в соответствии с системой оценивания (рейтинговой, накопительной и др.), а также формами и методами (как традиционными, так и инновационными, включая компьютерные технологии), указанными в рабочей программе дисциплины (модуля). Текущий контроль проводится в пределах учебного времени, отведенного рабочим учебным планом на освоение дисциплины, результаты заносятся в журнал учебных занятий.

Объем времени, отводимый на выполнение лабораторных работ, планируется в соответствии с учебным планом ОПОП.

Перечень лабораторных работ в РПД, а также количество часов на их проведение должны обеспечивать реализацию требований к знаниям, умениям и практическому опыту студента по дисциплине (модулю) соответствующей ОПОП.

Самостоятельная работа обучающихся – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).

Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;
- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля); подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся (текущая аттестация); подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).

Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:

- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;
- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;
- степенью подготовленности обучающихся.

|  |
|--|
|  |
|--|

## Входной контроль

### Тест

1. Пусть  $A$ - матрица. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно чтобы определитель матрицы был отличен от 1  
Верно  
Неверно
2. Дробно-линейная функция осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя  
Верно  
Неверно
3. При дробно-линейном отображении окружности и прямые переходят в окружности и прямые  
Верно  
Неверно
4. Конформное отображение обладает свойствами постоянства растяжений и сохранения углов  
Верно  
Неверно
5. Функция  $f(z)$  является гармонической в области  $D$ , если она имеет в ней непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа  
Верно  
Неверно
6. Функция  $f(z)=1/z$  дифференцируема во всей комплексной плоскости, кроме 0  
Верно  
Неверно
7. Как записываются условия Коши-Римана для аналитической функции  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ?
  - a.  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
  - b.  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$
  - c.  $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$
8. В каких точках функция  $f(z)=e^z$  является дифференцируемой?
  - a. во всей комплексной плоскости, кроме 1
  - b. во всей комплексной плоскости
  - c. во всей комплексной плоскости, кроме 0
9. Функция  $f(z)=c$  является аналитичной во всей комплексной плоскости  
Верно  
Неверно
10. В каких точках функция  $f(z)=az+b$  является дифференцируемой?
  - a. во всей комплексной плоскости, кроме 0
  - b. во всей комплексной плоскости, кроме 1
  - c. во всей комплексной плоскости

**Критерии оценки теста:**

**60% и более: зачтено, менее 60%: незачтено**

## Текущий контроль 1

### Тест

1. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  для линейного преобразования  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  линейное, внешнее и внутреннее отклонения совпадают.

Верно  
Неверно

2. Найти отклонение линейного преобразования  $A: \{x, y\} \rightarrow \{x+y, y\}$

- a)  $(3+\sqrt{5})/2$
- b)  $(1-\sqrt{2})/2$
- c)  $(3-\sqrt{5})/2$

3. Отображение  $f: D \rightarrow D'$  областей в  $\mathbb{R}^n$  называется диффеоморфизмом, если ...

- a)  $f$  гомеоморфизм
- b)  $f$  гомеоморфизм,  $f, f^{-1}$  дифференцируемы
- c)  $f$  дифференцируемо

4. Какие из перечисленных отображений являются 1-квазиконформными?

- a) перенос на вектор  $b$
- b) поворот на фиксированный угол
- c) подобие

5. Инверсия на плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно сферы является квазиконформным отображением. Чему равен коэффициент квазиконформности?

- a) 2
- b) 1
- c) 3

6. При стереографической проекции ...

- a) Окружности, не проходящие через полюс, переходят в окружности
- b) Окружности, проходящие через полюс, переходят в окружности
- c) Окружности, не проходящие через полюс, переходят в прямые
- d) Окружности, проходящие через полюс, переходят в прямые

7. Производные

- a) производные Коши-Римана
- b) производные Виртингера
- c) производные Эйлера-Даламбера

8. Отображение, осуществляемое аналитической функцией, является конформным в любой точке, в которой ее производная отлична от нуля

- a) Верно
- b) Неверно

9. Задача об отыскании наиболее близкого к конформному отображения одного прямоугольника на другой с соответствием вершин -- это задача ...

- a) Альфорса-Берлинга
- b) Бельтрами
- c) Греча

10. Теорема Лиувилля: всякое конформное отображение области пространства  $\mathbb{R}^n, n \geq 2$  является ...

- a) мебиусовым отображением
- b) постоянным отображением
- c) квазиконформным с коэффициентом  $K$ , не равным 1

**Критерии оценки теста:**

**60% и более: зачтено, менее 60%: незачтено**

## Текущий контроль 2

### Контрольная работа

**Задача 1.** Линейное преобразование  $A : R^3 \rightarrow R^3$  задано матрицей  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Найти для  $A$  главные растяжения и отклонения.

**Задача 2.** Вычислить емкость и модуль конденсатора

$$D = \{x \in R^3 : 1 < |x| < 3\},$$

$$E_0 = \{x : |x| = 1\},$$

$$E_1 = \{x : |x| = 3\}.$$

**Задача 3.** Решить задачу 2 при условиях

$$E_0 = \{1\},$$

$$E_1 = \{x : |x| = 3\}.$$

**Задача 4.** Доказать утверждение:

Инверсия относительно сферы является 1-квазиконформным отображением (все его коэффициенты квазиконформности равны 1).

Указания к решениям

Задача 1 решается по аналогии с примером 1.3.3.

Задача 2. Использовать теорему 4.3.1, учитывая, что в трехмерном пространстве  $R^3$  2-мерная мера Лебега это площадь единичного круга.

Задача 3 Воспользоваться следствием 4.3.4.

Задача 4. Воспользоваться утверждением 2.2.5.

**Критерии оценки контрольной работы:**

**50% заданий и более: зачтено,**

**менее 50% заданий: незачтено**

**Тест итоговый**  
**(письменный вариант зачета)**

1. Коэффициент Бельтрами связан с коэффициентом квазиконформности соотношением:

- a)  $K = \frac{\mu(z)}{1 - \mu(z)}$
- b)  $K = \frac{\mu(z)}{1 + \mu(z)}$
- c)  $K = \frac{1 + \mu(z)}{1 - \mu(z)}$

2. Уравнение Бельтрами:

- a)  $\overline{f_z} = 0$
- b)  $\overline{f_z} = \mu(z) f_z$
- c)  $\overline{f_z} = f_z$

3. Якобиан касательного отображения дифференцируемого отображения  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  вычисляется по формуле:

- a)  $J = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$
- b)  $J = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$
- c)  $J = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$

4. Для конформных отображений выполняется равенство:

- a)  $\overline{f_z} = 0$
- b)  $f_z = 0$
- c)  $\overline{f_z} = f_z$

5. Найти коэффициент квазиконформности отображения квадрата  $\{z = x + iy: 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$  на квадрат  $\{z = u + iv: 0 < u < 4, 0 < v < 2\}$ .

- a)  $K = 1$
- b)  $K = 4$
- c)  $K = 2$

6. Верно или нет: отображение  $f$  и  $f^{-1}$  одновременно  $K$ -квазиконформны.

- a) верно
- b) неверно

7. Каков коэффициент квазиконформности композиции  $K_1$ -квазиконформного и  $K_2$ -квазиконформного отображений?

- a)  $K_1 \cdot K_2$
- b)  $K_1 + K_2$
- c)  $\frac{K_1}{K_2}$

8. Можно ли квазиконформным отображением отобразить единичный круг на всю плоскость?

- a) да
- b) нет

9. Для линейного отображения  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  с главными растяжениями  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , такими что  $\lambda_{\max} = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ ,  $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  величина  $H_L = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$  называется ...

- a) внешним отклонением отображения  $A$
- b) линейным отклонением отображения  $A$
- c) внутренним отклонением отображения  $A$

10. Верно ли утверждение: на плоскости для линейного отображения  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  внешний, внутренний и лаврентьевский коэффициенты совпадают.

- a) верно
- b) неверно

11. Чему равен коэффициент квазиконформности композиции  $K$ -квазиконформного и  $1$ -квазиконформного отображений?

- a)  $K+1$
- b)  $K-1$
- c)  $K$

12. 1-квазиконформными отображениями в пространстве  $\mathbb{R}^n$  являются:

- a) гомотетия
- b) перенос на вектор
- c) отражение относительно гиперплоскости
- d) поворот на угол

13. Конформное отображение является 1-квазиконформным

- a) верно
- b) неверно

14. Каков коэффициент квазиконформности инверсии относительно сферы на плоскости?

- a) 2
- b) 3
- c) 1

15. При стереографической проекции ...

- a) Окружности, не проходящие через полюс, переходят в окружности
- b) Окружности, проходящие через полюс, переходят в окружности
- c) Окружности, не проходящие через полюс, переходят в прямые

16. Производные Виртингера – это производные

- a)  $f_z, \overline{f_z},$
- b)  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$
- c)  $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$

17. Теорема Лиувилля: всякое конформное отображение области пространства  $\mathbb{R}^n, n \geq 2$  является ...

- a) мебиусовым отображением
- b) постоянным отображением
- c) квазиконформным с коэффициентом  $K$ , не равным 1.

18. Отображение  $f: D \rightarrow D'$  областей в  $\mathbb{R}^n$  называется диффеоморфизмом, если ...

- a)  $f$  гомеоморфизм
- b)  $f$  гомеоморфизм,  $f, f^{-1}$  дифференцируемы
- c)  $f$  дифференцируемо.

19. Чему равен коэффициент квазиконформности постоянного отображения на плоскости  $\mathbb{R}^2$ ?

- a) 2
- b) 1
- c) 3

20. Задача об отыскании наиболее близкого к конформному отображения одного прямоугольника на другой с соответствием вершин -- это задача ...
- a) Альфорса-Берлинга
  - b) Бельтрами
  - c) Греча

**Критерии оценки теста:**

**60% и более: зачтено, менее 60%: незачтено**

## Перечень вопросов к зачету (устный вариант зачета)

1. Главные растяжения отклонения линейного преобразования. Алгоритм вычисления главных растяжений. Отклонения линейного преобразования. Элементарные свойства отклонений.
2. Отклонения линейного преобразования. Вычисление отклонений линейного преобразования плоскости.
3. Отклонения линейного преобразования в  $R_n$ . Оценки для отклонений.
4. Отклонения линейного преобразования в  $R_n$ . Оценки для отклонений. Полумультпликативность отклонений.
5. Коэффициенты квазиконформности диффеоморфизмов в  $R_n$ . Понятие квазиконформного отображения. Свойства коэффициентов квазиконформности.
6. Доказать, что на плоскости понятие 1-квазиконформного отображения и конформного преобразования совпадают.
7. Инверсия относительно сферы в  $R_n$ . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования инверсии.
8. Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования закручивания двугранного клина в  $R^3$  вокруг его ребра.
9. Радиальное отображение единичного шара в  $R^3$ . Вычисление коэффициентов квазиконформности преобразования растяжения.
10. Стереографическая проекция пространства  $R_n$ . Определение мебиусова пространства  $R_n$ , понятие обобщенной сферы и инверсии относительно обобщенной сферы. Геометрические свойства инверсии.
11. Мёбиусово преобразование пространства  $R_n$ , свойства. Примеры.
12. Мёбиусово преобразование пространства  $R_n$ . Конформные и антиконформные преобразования областей пространства  $R_n$  (случай  $n=2$  и случай  $n>2$ ). Теорема Лиувилля.
13. Задача Альфорса-Берлинга и ее решение. Понятие квазисимметрической функции.
14. Метрическое определение квазиконформного отображения, его геометрический смысл. Показать, что квазиконформный диффеоморфизм является квазиконформным в смысле метрического определения квазиконформного отображения.
15. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства.
16. Абсолютно непрерывная вещественная функция одной переменной. Абсолютно непрерывная вектор-функция на интервале вещественной прямой, ее свойства. Абсолютно непрерывное отображение на  $n$ -мерном сегменте в  $R_n$ . Класс отображений ACL в области  $D$  пространства  $R_n$ . Свойства класса ACL. Отображения класса ACL,  $ACL_n$ ,  $loc$ .
17. Аналитическое определение квазиконформности. Теорема сходимости. Теорема компактности.
18. Конденсатор кольцевой в  $R_n$ . Емкость и модуль конденсатора. Емкость шарового слоя.
19. Квазиинвариантность емкости кольцевого конденсатора.
20. Геометрическое определение квазиконформности. Вычисление емкости цилиндра, основания которого служат пластинами конденсатора.
21. Вычисление емкости цилиндрического слоя, боковые поверхности которого служат пластинами конденсатора. Емкость провода.
22. Симметризация конденсатора, основная теорема симметризации Геринга.
23. Лемма Вайсяля. Нижние оценки для емкости кольцевых конденсаторов.
24. Кольцо Тейхмюллера, функция Тейхмюллера, ее свойства. Нижняя оценка для емкости кольцевого конденсатора через функцию Тейхмюллера.

25. Абсолютное двойное отношение четверки точек в  $R^n$ . Мебиусова инвариантность абсолютного двойного отношения. Критерий мебиусовости гомеоморфизма  $R^n$  в терминах абсолютного двойного отношения.

**Критерии оценки:**

**"Зачтено":**

- студент знает формулировки определений, вынесенных на зачет;
- студент знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет;
- контрольная работа зачтена.

**"Не зачтено":**

- студент не знает формулировки определений, вынесенных на зачет;
- студент не знает формулировки всех утверждений и теорем, вынесенных на зачет;
- контрольная работа не зачтена.