

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)

Геометрическая теория функций
рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **кафедра математики, физики и информатики**

Учебный план 01.04.01_2025_645M.plx
01.04.01 Математика
Компьютерное моделирование и анализ в геометрии

Квалификация **магистр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **4 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 144
в том числе:
аудиторные занятия 42
самостоятельная работа 65,1
часов на контроль 34,75

Виды контроля в семестрах:
экзамены 3

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	3 (2.1)		Итого	
	11			
Неделя	11			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	24	24	24	24
Консультации (для студента)	0,9	0,9	0,9	0,9
Контроль самостоятельной работы при проведении аттестации	0,25	0,25	0,25	0,25
Консультации перед экзаменом	1	1	1	1
Итого ауд.	42	42	42	42
Контактная работа	44,15	44,15	44,15	44,15
Сам. работа	65,1	65,1	65,1	65,1
Часы на контроль	34,75	34,75	34,75	34,75
Итого	144	144	144	144

Программу составил(и):

к.ф.-м.н., доцент, Тулина М.И.; к.ф.-м.н., доцент, Туртуева Т.А.

Рабочая программа дисциплины

Геометрическая теория функций

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика (приказ Минобрнауки России от 10.01.2018 г. № 12)

составлена на основании учебного плана:

01.04.01 Математика

утвержденного учёным советом вуза от 30.01.2025 протокол № 2.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры

кафедра математики, физики и информатики

Протокол от 10.04.2024 протокол № 10

Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2025-2026 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2025 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2026 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2027 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2028-2029 учебном году на заседании кафедры **кафедра математики, физики и информатики**

Протокол от _____ 2028 г. № ____
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1.1	<i>Цели:</i> углубленное изучение геометрических вопросов теории функций комплексного переменного
1.2	<i>Задачи:</i> - подготовка студентов для научно-исследовательской и практической деятельности в области геометрической теории функций, комплексного анализа и их приложений; - развитие общей математической культуры и формирование у студентов понимания роли геометрической теории функций в развитии комплексного анализа, в прикладной математике и естественных науках; - формирование навыков работы с научными публикациями;

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Цикл (раздел) ООП:		Б1.В
2.1	Требования к предварительной подготовке обучающегося:	
2.1.1	Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы)	
2.2	Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:	
2.2.1	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы	
2.2.2	Преддипломная практика	

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

ПК-3: Способен решать общенаучные и прикладные задачи, анализировать и обобщать результаты научно-исследовательских работ, публично представлять собственные новые научные результаты	
ИД-1.ПК-3: Знает методы математического и алгоритмического моделирования	
знает методы математического и алгоритмического моделирования в геометрической теории функций	
ИД-2.ПК-3: Умеет анализировать, обобщать и публично представлять результаты научно-исследовательских работ в области математики	
умеет анализировать и обобщать результаты научно-исследовательских работ в геометрической теории функций	

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетенции	Литература	Инте ракт.	Примечание
	Раздел 1. Сходимость последовательностей аналитических и гармонических функций						
1.1	Сходимость последовательностей аналитических и гармонических функций /Лек/	3	8	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
1.2	Сходимость последовательностей аналитических и гармонических функций /Пр/	3	8	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
1.3	Сходимость последовательностей аналитических и гармонических функций /Ср/	3	17,8	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
	Раздел 2. Принципы конформного отображения односвязных областей						
2.1	Принципы конформного отображения односвязных областей /Лек/	3	6	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
2.2	Принципы конформного отображения односвязных областей /Пр/	3	8	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
2.3	Принципы конформного отображения односвязных областей /Ср/	3	24	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	

	Раздел 3. Метрические свойства замкнутых множеств на плоскости						
3.1	Метрические свойства замкнутых множеств на плоскости /Лек/	3	4	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
3.2	Метрические свойства замкнутых множеств на плоскости /Пр/	3	8	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
3.3	Метрические свойства замкнутых множеств на плоскости /Ср/	3	23,3	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.1 Л1.2Л2.1	0	
	Раздел 4. Консультации						
4.1	Консультация по дисциплине /Конс/	3	0,9	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.2	0	
	Раздел 5. Промежуточная аттестация (экзамен)						
5.1	Подготовка к экзамену /Экзамен/	3	34,75	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.2	0	
5.2	Контроль СР /КСРАТТ/	3	0,25	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.2	0	
5.3	Контактная работа /КонсЭж/	3	1	ИД-1.ПК-3 ИД-2.ПК-3	Л1.2	0	

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины.

2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения входного контроля, текущего контроля 1 и 2 в форме вопросов, заданий, а также примерный перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена.

5.2. Оценочные средства для текущего контроля

5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Письменные работы не предусмотрены.

5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену:

1. Сходимость последовательностей аналитических функций.
2. Принцип сгущения.
3. Теорема Витали.
4. Сходимость гармонических функций.
5. Теорема Гарнака.
6. Однолистное конформное отображение.
7. Лемма Шварца.
8. Теорема Римана.
9. Минимизация максимума модуля.
10. Минимизация площади.
11. Лемма Кёбе.
12. Лемма Линделёф.
13. Достижимые граничные точки.
14. Частные типы областей.
15. Теорема площадей.
16. Теорема искажения. Теорема вращения.
17. Теорема Каратеодори о сходимости для конформного отображения последовательности областей.
18. Модулярные и автоморфные функции.
19. Нормальные семейства аналитических функций.
20. Теорема Монтель. Основной признак нормальности.
21. Теорема (Обобщенный признак нормальности).
22. Теорема Пикар.
23. Теоремы покрытия.
24. Теорема Рунге.
25. Теоремы о приближении аналитических функций полиномами.
26. Однолистное отображение многосвязных областей на круговые области.
27. Формула Кристоффеля-Шварца.
28. Теоремы сходимости для однолистного отображения последовательности областей.

29. Параметрическое представление однолистных функций.
30. Теорема Брауэра.
31. Вариация однолистных функций
32. Соответствие границ при отображении многосвязной области на круг.
33. Теоремы вращения и искажения.
32. Отображение n - связной области на n - листный круг.
35. Усиление теорем искажения.
36. Трансфинитный диаметр и постоянная Чебышева.
37. Граница выпуклости

Критерии оценки:

- оценка «отлично» выставляется студенту, если он обнаружил всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой, усвоивший основную и знакомый с дополнительной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка «отлично» выставляется студентам, усвоил взаимосвязь основных понятий дисциплины в их значении для приобретаемой профессии, проявил творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала. Оценка «отлично» ставится за полное соответствие ответа утвержденным выше критериям;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если он показал полные знания учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные в программе задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Как правило, оценка «хорошо» выставляется студентам, показавшим систематический характер знаний по дисциплине и способным к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности. Оценка «хорошо» ставится за ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «отлично», но при этом студент допускает несколько незначительных ошибок, которые после замечания экзаменатора самостоятельно исправляет;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если он показал знание учебно-программного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работе по профессии, справляется с выполнением заданий, предусмотренных программой, знаком с основной литературой, рекомендованной программой. Как правило, оценка «удовлетворительно» выставляется студентам, допустившим погрешности в ответе на экзамене и при выполнении экзаменационных заданий, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя. Оценка «удовлетворительно» ставится за слабые знания экзаменационного материала, но недостатки в подготовке студента не мешают ему в дальнейшем овладеть знаниями по специальности в целом;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, за такое незнание большей части экзаменационного материала, которое свидетельствует об очень слабом понимании или непонимании предмета и не позволит ему овладеть знаниями по специальности. Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, обнаружившему существенные пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий.

Контрольные тесты и задания

Вопрос 1. (ПК-3) Дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются

...

- а) регулярными
- б) гармоническими
- в) гомеоморфными
- г) конформными

Ключ: б.

Вопрос 2. (ПК-3) Конформное отображение не сохраняет ...

- а) форму бесконечно малых фигур
- б) углы между кривыми
- в) расстояния
- г) постоянство растяжения

Ключ: в.

Вопрос 3. (ПК-3) Верно ли, что аксиомы метрического пространства включают следующие условия для функции $\rho(x, y)$, где x и y — точки пространства:

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ — «аксиома тождества».
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ — «аксиома симметрии».
3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых x, y, z — «аксиома треугольника» (неравенство треугольника).

Ключ: верно.

Вопрос 4. (ПК-3) Выделить действительную и мнимую части функции $f(z) = z^2$.

- а) $(x^2 + y^2) - i 2xy$;
 б) $(x^2 + y^2) + i 2xy$;
 в) $(x^2 - y^2) - i 2xy$;
 г) $(x^2 - y^2) + i 2xy$.
 Ключ: г.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л1.1	Чушев В.В.	Сборник задач по геометрической теории функций на компактных римановых поверхностях: учебное пособие	Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2010	
Л1.2	Тулина М. И.	Геометрическая теория функций: учебное пособие	Горно-Алтайск: БИЦ ГАГУ, 2024	https://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=6069:1202&catid=107:fmf24&Itemid=154

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.1	Боярчук А.К.	Справочное пособие по высшей математике. Т.4. Функции комплексного переменного: теория и практика: в 4-х томах: справочник	Москва: Едиториал УРСС, 2004	

6.3.1 Перечень программного обеспечения

6.3.1.1	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ			
6.3.1.2	MS Office			
6.3.1.3	MS WINDOWS			
6.3.1.4	Яндекс.Браузер			
6.3.1.5	LibreOffice			
6.3.1.6	NVDA			
6.3.1.7	Moodle			
6.3.1.8	РЕД ОС			
6.3.1.9	MS Windows			

6.3.2 Перечень информационных справочных систем

6.3.2.1	Межвузовская электронная библиотека			
6.3.2.2	Электронно-библиотечная система IPRbooks			
6.3.2.3	База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета»			

7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

	презентация	
--	-------------	--

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Номер аудитории	Назначение	Основное оснащение
206 Б1	Кабинет методики преподавания математики. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, интерактивная доска, экран, проектор, компьютер, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя

207 Б1	Лекционная аудитория. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, проектор, экран, системный блок, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
209 Б1	Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.

Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у студентов, усвоивших материал всех предыдущих лекций. Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.

Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где студент может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.

Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.

Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа студентов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал, студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.

Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы. Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.

Подобрав, отработав материал и усвоив его, студент должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.

По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).

Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.

Самостоятельная работа обучающихся – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская

работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).

Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:

- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;
- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля); подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся (текущая аттестация); подготовка к лабораторным работам; подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).

Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:

- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;
- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;
- степенью подготовленности обучающихся.

Входной контроль

Тест

Задание 1. Найти модуль комплексного числа:

а) $z_1 = -3 + 2i$; б) $z_2 = 4 + 3i$; в) $z_3 = -i$; г) $z_4 = 1 - i$.

Ответы:

а	1) 4; 2) $\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{13}$; 4) $\sqrt{11}$.
б	1) 5; 2) 7; 3) 4,5; 4) $\sqrt{7}$.
в	1) -1; 2) 1; 3) 0; 4) 2.
г	1) 2; 2) -2; 3) $\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{2}$.

Задание 2. Найти аргументы комплексных чисел из предыдущего задания.

Ответы:

а	1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\pi - \arctg \frac{2}{3}$; 3) $\arctg \frac{2}{3}$; 4) $-\arctg \frac{3}{2}$.
б	1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{3}{4}\pi$; 3) $\arctg \frac{3}{4}$; 4) $\arctg \frac{4}{3}$.
в	1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $-\frac{\pi}{2}$; 3) 0; 4) π .
г	1) $\frac{3}{4}\pi$; 2) $-\frac{2}{3}\pi$; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 4) $-\frac{\pi}{2}$.

Задание 3. Записать комплексные числа в тригонометрической форме

а) $z = 1 - i\sqrt{3}$; б) $z = -1$; в) $z = i$.

Ответы:

а	1) $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$; 2) $2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$; 3) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.
б	1) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; 2) $\cos \pi + i \sin \pi$; 3) $\cos \pi + i \sin \frac{\pi}{2}$.
в	1) $\cos \frac{\pi}{2}$; 2) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$; 3) $\cos \pi + i \sin \pi$.

Задание 4. Записать в тригонометрической форме числа:

а) $z = (1 - i\sqrt{3})^{10}$; б) $z = (-1 + i)^6$.

Ответы:

а	1) $1024(\cos(-120^\circ) + i\sin 120^\circ)$; 2) $512\left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $1024\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}\right)$.
б	1) $8\left(\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $4\left(\cos \frac{3\pi}{4} - i\sin \frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $8\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $8\left(\cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2}\right)$.

Задание 5. Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2 :

а) $z_1 = 2 - i3$; $z_2 = 6 + i$; б) $z_1 = -i$; $z_2 = i$.

Ответы:

а	1) $16 - 15i$; 2) $15 + 16i$; 3) <u>$15 - 16i$</u> .
б	1) 2; 2) 0; 3) <u>1</u> ; 4) 0,5.

Задание 6. Найти отношение $\frac{z_1}{z_2}$ чисел, заданных в предыдущей задаче.

Ответы:

а	1) $\frac{11}{35} - i\frac{20}{35}$; 2) $\frac{13}{36} + i\frac{18}{36}$; 3) <u>$\frac{9}{37} - i\frac{20}{37}$</u> ; 4) $\frac{11}{37} + i\frac{19}{37}$.
б	1) 1; 2) 0; 3) <u>-1</u> ; 4) i .

Задание 7. Найти уравнение линии в декартовой системе координат:

а) $\operatorname{Re} z = 3$; б) $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$; в) $|z| = 2$; г) $\arg z = -\frac{\pi}{4}$.

Ответы:

а	1) $y = 3$; 2) $x + y = 3$; 3) <u>$x = 3$</u> ; 4) $y - x = 3$.
б	1) $y + x = 1$; 2) $y - x = 2$; 3) <u>$y = x$</u> ; 4) $x = 2y$.
в	1) $xy = 2$; 2) $x - y = 1$; 3) $x^2 - y^2 = 2$; 4) <u>$x^2 + y^2 = 4$</u> .
г	1) $x + y = 1$; 2) $y = x$; 3) <u>$y = -x, x > 0$</u> ; 4) $y = x, x < 0$.

Задание 8. Найти значение функции $f(z)$ в точке z_0 :

- а) $f(z) = e^z$, $z_0 = 1 - i$;
 б) $f(z) = \operatorname{Ln} z$, $z_0 = 1 - i$;
 в) $f(z) = |z| \cdot \bar{z}$, $z_0 = 1 - i$.

Ответы:

а	1) $e\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $e\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$; 3) <u>$e(\cos 1 - i \sin 1)$</u> ; 4) $e^{\sqrt{2}}(\cos \pi + i \sin \pi)$.
б	1) $\ln 2 + i \sin \frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{3}$; 3) <u>$\ln \sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$</u> ; 4) $\ln 3 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$.
в	1) $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; 3) <u>$\sqrt{2} + i\sqrt{2}$</u> ; 4) $\sqrt{3} + i\sqrt{3}$.

Задание 9. Выделить действительную и мнимую части функции $f(z)$:

- а) $f(z) = z^2$; б) $f(z) = ze^z$; в) $f(z) = \sin z$.

Ответы:

а	1) $(x^2 + y^2) - i2xy$; 2) $(x^2 + y^2) + i2xy$; 3) $(x^2 - y^2) - i2xy$; 4) <u>$(x^2 - y^2) + i2xy$</u> .
б	1) <u>$e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y)$</u> ; 2) $e^y(x \cos y + y \sin y) - ie^y(x \cos y - x \sin y)$; 3) $e^x(x \sin y - y \sin x) + ie^y(x \cos y + x \sin y)$.
в	1) $\sin x \cdot shy + i \cos y \cdot chy$; 2) <u>$\sin x \cdot chy + i \cos x \cdot shy$</u> ; 3) $shx \cdot \cos y + ishy \cdot \sin x$.

Задание 10. Пользуясь условиями Коши-Римана, выяснить, какие из заданных ниже функций, аналитичны в точке $z = 1 + i$:

- а) $f(z) = \bar{z}$; б) $f(z) = z^2$; в) $f(z) = \sin 3z$; г) $f(z) = z \cdot |z|$.

Ответы: 1) (а, б, г); 2) (б, г); 3) (б, в); 4) (в; г).

Текущий контроль 1

Тест

Задание 1. Какая (какие) из следующих функций может являться действительной частью аналитической функции:

а) $x^2 - y^2 + 2xy$; б) x^2 ; в) $\ln(x^2 + y^2)$; г) $\frac{x^2 + 1}{2} \cdot y^2$.

Ответы: 1) (а, г); 2) (б, в); 3) (б, г); 4) (а; в).

Задание 2. Вычислить интегралы:

а) $\int_C (1 + i - 2\bar{z}) dz$, где С: отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$, стрелка направлена в сторону точки z_2 .

Ответы: 1) $2(i - 1)$; 2) $2(1 - i)$; 3) $2 - i$; 4) $2i - 1$;

б) $\int_C (z^2 + z\bar{z}) dz$, где С: дуга окружности $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$.

Ответы: 1) $5i$; 2) $4 + i$; 3) $-\frac{8}{3}$; 4) $4,5$.

Задание 3. Используя интегральную формулу Коши, вычислить интегралы по замкнутым контурам С:

а) $\oint_C \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz$. Ответы: 1) $2\pi i$; 2) πi ; 3) $\frac{\pi i}{2}$; 4) $\frac{\pi i}{3}$;

$C: |z| = 1$

б) $\oint_C \frac{dz}{z^2 + 16}$. Ответы: 1) $2i$; 2) 0 ; 3) π ; 4) -3 ;

$C: |z| = 5$

в) $\oint_C \frac{dz}{z}$. Ответы: 1) 0 ; 2) 1 ; 3) π ; 4) $\frac{\pi}{2}$.

$C: |z - 2| = 1$

Задание 4. Опираясь на интегральную форму представления производной аналитической функции, вычислить интегралы:

а) $\oint_C \frac{\cos z}{z^3} dz$. Ответы: 1) πi ; 2) $2\pi i$; 3) $-\pi i$; 4) $-2\pi i$;

$|z| = 1$

б) $\oint_C \frac{z dz}{(z - 2)^2 (z + 4)}$. Ответы: 1) πi ; 2) $\frac{\pi i}{3}$; 3) $-\frac{\pi i}{9}$; 4) $\frac{2\pi i}{9}$;

$|z - 3| = 6$

в) $\oint_C \frac{dz}{z^3}$. Ответы: 1) -2 ; 2) -1 ; 3) 0 ; 4) 1 .

$|z - 2| = 1$

Задание 5. Найти радиус сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} \cdot z^n$. Ответы: 1) e ; 2) $\frac{1}{e}$; 3) 1; 4) 0,5;

б) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$. Ответы: 1) 2; 2) 1; 3) \sqrt{e} ; 4) e .

Задание 6. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}$ в

окрестности точки $z=0$. В ответ записать коэффициент при z^3 и радиус сходимости ряда.

Ответы: 1) $(-\frac{1}{9}; 2)$ 2) $(-\frac{9}{7}; 3)$; 3) $(-\frac{7}{27}; 1)$; 4) $(-\frac{2}{9}; 2)$.

Задание 7. Разложить в ряд Лорана функцию

$f(z) = z^2 \cdot \cos \frac{1}{z}$. В ответ записать коэффициент при z^{-4} .

Ответы: 1) $\frac{1}{3!}$; 2) $\frac{2}{5!}$; 3) $\frac{3}{6!}$; 4) $-\frac{1}{6!}$.

Задание 8. Сколько особых точек имеет функция $f(z)$ в области, ограниченной контуром C :

а) $f(z) = \frac{1}{z \cdot \sin(z-1)}$; $|z|=5$. Ответы: 1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 2;

б) $f(z) = \frac{z+1}{z^5 + 2z^4 + z^3}$; $|z|=3$. Ответы: 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

Задание 9. При каких значениях α особая точка $z=0$ будет: а)

устранимой, б) полюсом, в) существенно особой точкой, если $f(z) = \frac{\sin z^\alpha}{z}$.

Выбрать правильный набор ответов из предложенных ниже:

	1	2	3	4
а	<u>1</u>	-1	0	2
б	3	1	2	<u>0</u>
в	2	1	-1	<u>-1</u>

Задание 10. Для правильного набора ответов из задания №19 найти вы-

четы функции $f(z) = \frac{\sin z^\alpha}{z}$ относительно особой точки $z=0$.

1 0 0 2 0
Ответы: 1) -1 ; 2) 1 ; 3) 1 ; 4) -1 ; 5) $\sin 1$.
2 -1 0 0 0

Оценочное средство
Текущий контроль 2
Тест

Вариант 1.

1. Конформное отображение не обладает свойством:
 - а) постоянство растяжения
 - б) сохранение углов
 - в) сохранение расстояния
 - г) сохранение формы бесконечно малых фигур
2. Однозначные аналитические функции, которые не меняются при некоторой группе дробно-линейных преобразований аргумента, называются:
 - а) модулярными
 - б) автоморфными
 - в) регулярными
 - г) конформными
3. Дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются:
 - а) регулярными
 - б) гармоническими
 - в) взаимно однозначными
 - г) конформными
4. Вещественная неотрицательная функция двух переменных $\rho(x, y)$, где x и y пробегают множество X , называется полуметрикой на X , если выполнены аксиомы:
 - а) тождества и симметричности
 - б) симметричности и неравенство треугольника
 - в) тождества и неравенство треугольника
 - г) тождества, симметричности и неравенство треугольника
5. Если последовательность функций $f_n(z)$, регулярных в области D , равномерно ограничена внутри D , то из этой последовательности можно выделить последовательность:
 - а) сходящуюся внутри D к непрерывной функции
 - б) сходящуюся внутри D к регулярной функции
 - в) равномерно сходящуюся на границе D к регулярной функции
 - г) равномерно сходящуюся внутри D к регулярной функции
6. Трансфинитный диаметр множества A - это число $D_\infty(A)$, равное:
 - а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{\vec{x} \in A^n} \left(\prod_{i,j=1, i \neq j}^n \rho(x_i, x_j) \right) \right]^{\frac{1}{n}}$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - б) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\inf_{\vec{x} \in A^n} \left(\prod_{i,j=1, i \neq j}^n \rho(x_i, x_j) \right) \right]^{\frac{1}{n(n-1)}}$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{\vec{x} \in A^n} \left(\sum_{i,j=1, i \neq j}^n \rho(x_i, x_j) \right) \right]^{\frac{1}{n(n-1)}}$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
 - г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sup_{\vec{x} \in A^n} \left(\prod_{i,j=1, i \neq j}^n \rho(x_i, x_j) \right) \right]^{\frac{1}{n(n-1)}}$, где $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
7. Если последовательность функций $f_n(z)$, регулярных в области D , равномерно ограничена внутри D и сходится на множестве точек $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots$, имеющем точку сгущения внутри, то:
 - а) она сходится внутри D
 - б) она сходится равномерно в D
 - в) она сходится равномерно внутри D
 - г) другое
8. Пусть отображение $f : X \rightarrow Y$ полуметрического пространства (X, ρ_1) в полуметрическое пространство (Y, ρ_2) является L -липшицевым с константой $L > 0$. Тогда для любого множества $A \subset X$ неравенство $D_n(f(A)) \leq LD_n(A)$ выполняется при всех:
 - а) $n = 1, 2, \dots, \infty$

- б) $n = 3, 4, \dots, \infty$
- в) $n = 2, 3, \dots, \infty$
- г) только при $n = 1; 2$.

Вариант 2.

1. Конформное отображение не сохраняет:

- а) форму бесконечно малых фигур
- б) углы между кривыми
- в) расстояние
- г) растяжение

2. Если функция $F(\zeta) = \zeta + \frac{a_1}{s} + \dots = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k}$ регулярна, исключая полюсы в $\zeta = \infty$, и

однолистка в области $|\zeta| > 1$ то:

- а) $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq 1$
- б) $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \leq 1$
- в) $\sum_{k=1}^{\infty} n|\alpha_n| \leq 1$
- г) $\sum_{k=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1$

3. Какому условию удовлетворяют гармонические функции:

- а) условию Коши-Римана
- б) уравнению Лапласа
- в) условию непрерывности
- г) условию регулярности

4. Если z_0 есть существенно особая точка функции $f(z)$, то в любой окрестности этой точки $f(z)$ принимает:

- а) только конечные значения
- б) все конечные значения
- в) только конечные значения, кроме двух
- г) все конечные значения, кроме, может быть, одного

5. Пусть $f : X \rightarrow Y$ есть отображение полуметрического пространства (X, ρ_1) в полуметрическое пространство (Y, ρ_2) . Если для любого множества $A \subset X$ выполняется равенство $D_2(f(A)) = D_2(A)$, то f является

- а) липшицевым вложением
- б) изометрическим вложением
- в) вложением
- г) другим

6. (О монотонной сверху непрерывности трансфинитного диаметра). Пусть в непрерывном полуметрическом пространстве (X, ρ) задана убывающая последовательность непустых компактных множеств $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_m \subset \dots$. Тогда равенство $D_n(\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} D_n(K_m)$ выполняется для любого:

- а) $n = 2, 3, \dots$
- б) $n = 0, 1, \dots$
- в) $n = 1, 2, \dots$
- г) только для $n = 1; 2$

7. Пусть (X, ρ) - непрерывное полуметрическое пространство. Непустое множество $A \subset X$ называется ..., если не существует пары непустых открытых множеств $U, V \subset X$ таких, что $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset$, но $U \cap V = \emptyset$.

- а) связным
- б) компактным
- в) непрерывным
- г) отделимым

8. Непустое связное множество называется континуумом. Континуум называется ..., если он содержит по крайней мере две различные точки.

- а) невырожденным

- б) конечным
- в) несвязным
- г) непустым