МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Горно-Алтайский государственный университет»
(ФГБОУ ВО ГАГУ, ГАГУ, Горно-Алтайский государственный университет)**

Дифференциальные уравнения

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **кафедра математики, физики и информатики**

Учебный план 02.03.01_2025_625.plx
02.03.01 Математика и компьютерные науки
Цифровые технологии

Квалификация **бакалавр**

Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **4 ЗЕТ**

Часов по учебному плану 144
в том числе:
аудиторные занятия 36
самостоятельная работа 71,1
часов на контроль 34,75

Виды контроля в семестрах:
экзамены 5

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**5 (3.1)**		Итого	
Недель	16 1/6			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП
Лекции	18	18	18	18
Практические	18	18	18	18
Консультации (для студента)	0,9	0,9	0,9	0,9
Контроль самостоятельной работы при проведении аттестации	0,25	0,25	0,25	0,25
Консультации перед экзаменом	1	1	1	1
Итого ауд.	36	36	36	36
Контактная работа	38,15	38,15	38,15	38,15
Сам. работа	71,1	71,1	71,1	71,1
Часы на контроль	34,75	34,75	34,75	34,75
Итого	144	144	144	144

Программу составил(и):

к.ф.-м.н., доцент, Давыдкин Иван Борисович;к.ф.-м.н., доцент, Пушкарева Татьяна Алексеевна;к.ф.-м.н., доцент, Туртуева Татьяна Александровна

Рабочая программа дисциплины

Дифференциальные уравнения

разработана в соответствии с ФГОС:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 02.03.01 Математика и компьютерные науки (приказ Минобрнауки России от 23.08.2017 г. № 807)

составлена на основании учебного плана:

02.03.01 Математика и компьютерные науки

утвержденного учёным советом вуза от 30.01.2025 протокол № 2.

Рабочая программа утверждена на заседании кафедры

кафедра математики, физики и информатики

Протокол от 10.04.2025 протокол № 10

Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2026-2027 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2026 г. № __
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2027-2028 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2027 г. № __
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2028-2029 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2028 г. № __
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

Визирование РПД для исполнения в очередном учебном году

Рабочая программа пересмотрена, обсуждена и одобрена для исполнения в 2029-2030 учебном году на заседании кафедры
кафедра математики, физики и информатики

Протокол от __ __________ 2029 г. № __
Зав. кафедрой Богданова Рада Александровна

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	*Цели:* - овладение основными методами решения дифференциальных уравнений и задач из разных областей, приводящих к дифференциальным уравнениям
1.2	*Задачи:* - изучение основных понятий теории обыкновенных дифференциальных уравнений; - освоение методов решения уравнений и систем уравнений; - умение решать прикладные задачи на составление дифференциальных уравнений.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.О.16
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Математический анализ
2.1.2	Алгебра
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Комплексный анализ
2.2.2	Функциональный анализ
2.2.3	Численные методы
2.2.4	Уравнения с частными производными

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
УК-1: Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач
ИД-1.УК-1: Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.
Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие, осуществляет декомпозицию задачи
ИД-2.УК-1: Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.
Находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи
ИД-3.УК-1: Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений.
Рассматривает возможные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки
ОПК-1: Способен консультировать и использовать фундаментальные знания в области математического анализа, комплексного и функционального анализа алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнений, дискретной математики и математической логики, теории вероятностей, математической статистики и случайных процессов, численных методов, теоретической механики в профессиональной деятельности
ИД-1.ОПК-1: Знает основные понятия, определения, свойства математических объектов, формулировки и методы доказательств математических утверждений
Знает основные понятия, определения, свойства математических объектов, формулировки и методы доказательств математических утверждений
ИД-2.ОПК-1: Умеет доказывать утверждения, решать задачи в области математических наук
Умеет доказывать утверждения, решать задачи в области математических наук
ИД-3.ОПК-1: Способен консультировать в области фундаментальной математики
Способен консультировать в области фундаментальной математики

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Примечание

	Раздел 1. Дифф. уравнения первого порядка						
1.1	1. Нормальная форма дифференциального уравнения. Решение, общее решение, частное решение дифференциального уравнения. Задача Коши, начальные условия. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Интегральные кривые, изоклины, поле направлений дифференциального уравнения. 2. Классификация дифференциальных уравнений первого порядка по методам интегрирования: Уравнения с разделяющимися переменными; 3. Однородные уравнения и приводящиеся к однородным; Линейные однородные и неоднородные уравнения; методы решения линейных уравнений (метод Лагранжа, метод Бернулли, метод интегрирующего множителя, метод вариации произвольной постоянной); 4. Уравнения Бернулли; Уравнения в полных дифференциалах; 5. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро. /Лек/	5	8	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
1.2	1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Общее и частное решение. Интегральные кривые. Поле направлений. Метод изоклин. 2. Уравнения с разделяющимися переменными; 3. Однородные уравнения и приводящиеся к однородным; 4. Линейные однородные уравнения; 5. Методы решения линейных уравнений (метод Лагранжа, метод интегрирующего множителя, метод вариации произвольной постоянной); 6. Уравнения Бернулли; 7. Уравнения в полных дифференциалах; 5. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро. /Пр/	5	8	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
1.3	Классификация дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли и Риккати, в полных дифференциалах). Уравнения, неразрешённые относительно производной. /Ср/	5	30	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
	Раздел 2. Дифф. уравнения высших порядков						

2.1	1. Линейные уравнения высших порядков и их свойства. Общее решение линейного однородного уравнения высшего порядка. Линейные неоднородные уравнения высшего порядка. Общее решение. 2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. 3. Применение тригонометрических рядов к решению линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. 4. Уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. /Лек/	5	6	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
2.2	1. Линейные уравнения высших порядков и их свойства. Общее решение линейного однородного уравнения высшего порядка. 2. Линейные неоднородные уравнения высшего порядка. Общее решение. 3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение. 4. Применение тригонометрических рядов к решению линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами. 5. Уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. /Пр/	5	6	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
2.3	Виды дифференциальных уравнений высших порядков. Решение линейных однородных и неоднородных уравнений. /Ср/	5	22	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
	Раздел 3. Системы дифференциальных уравнений						

3.1	1. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь между уравнениями высших порядков и системами дифференциальных уравнений. 2. Линейные системы. Построение общего решения однородной линейной системы. Общее решение неоднородной линейной системы. 3. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод исключения. 4. Метод интегрируемых комбинаций. Метод Эйлера. 5. Метод Даламбера. /Лек/	5	4	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
3.2	1. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Физическая трактовка нормальной системы и её решение. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы.Общее и частное решения нормальной системы. Связь между уравнениями высших порядков и системами дифференциальных уравнений. 2. Линейные системы. Построение общего решения однородной линейной системы. Общее решение неоднородной линейной системы. 3. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод исключения. 4. Метод интегрируемых комбинаций. Метод Эйлера. 5. Метод Даламбера. /Пр/	5	4	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
3.3	Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы однородные и неоднородные. Линейные системы с постоянными коэффициентами. /Ср/	5	19,1	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1	Л1.1 Л1.2 Л1.3 Л1.4Л2.1 Л2.2 Л2.3 Л2.4 Л2.5 Л2.6 Л2.7	0	
	Раздел 4. Консультации						
4.1	Консультация по дисциплине /Конс/	5	0,9	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1		0	
	Раздел 5. Промежуточная аттестация (экзамен)						

5.1	Подготовка к экзамену /Экзамен/	5	34,75	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1		0	
5.2	Контроль СР /КСРАтт/	5	0,25	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1		0	
5.3	Контактная работа /КонсЭк/	5	1	ИД-1.УК-1 ИД-2.УК-1 ИД-3.УК-1 ИД-1.ОПК-1 ИД-2.ОПК-1 ИД-3.ОПК-1		0	

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Пояснительная записка

1. Назначение фонда оценочных средств. Оценочные средства предназначены для контроля и оценки образовательных достижений обучающихся, освоивших программу учебной дисциплины.

2. Фонд оценочных средств включает контрольные материалы для проведения входного контроля, текущего контроля 1 и 2 в форме вопросов, заданий, а также примерный перечень вопросов для проведения промежуточной аттестации в форме экзамена.

5.2. Оценочные средства для текущего контроля

Примерный комплект теста "Входной контроль"
1. Функция называется монотонно возрастающей, если при x > 0:
a. приращение функции у = 0;
b. приращение функции у > 0;
c. приращение функции у 0;
d. приращение функции у 0;
e. приращение функции у < 0.
2. Функция называется монотонно убывающей, если при x > 0:
a. приращение функции у = 0;
b. приращение функции у > 0;
c. приращение функции у 0;
d. приращение функции у 0;
e. приращение функции у < 0.
3. Функция имеет в точке а максимум, если первая производная в этой точке:
a. меняет знак с плюса на минус;
b. меняет знак с минуса на плюс;
c. остается постоянной;
d. стремится к бесконечности;
e. не меняет знак.
4. Функция имеет в точке а минимум, если первая производная в этой точке:
a. меняет знак с плюса на минус;
b. остается постоянной;
c. стремится к бесконечности;
d. меняет знак с минуса на плюс;
e. не меняет знак.
5. Сложной функцией называется:
a. функция, представляющая собой сумму или разность нескольких функций;
b. если она является логарифмом x;
c. если она равняется синусу x;
d. функция, аргументом которой является другая функция;
e. функция, представляющая собой произведение нескольких функций.

6. Производной функции y = f(x) называется:
a. предел отношения значения функции к значению аргумента при стремлении аргумента к нулю;
b. отношение значения функции к значению аргумента;
c. отношение приращения функции к приращению аргумента;
d. предел отношения значения функции к значению аргумента при стремлении значения аргумента к константе;
e. предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю.
7. Частной производной функции нескольких переменных называется:
a. производная от частного аргументов функции;
b. производная от произведения аргументов функции;
c. производная от логарифма частного аргументов функции;
d. производная от функции при условии, что все аргументы кроме одного остаются постоянными;
e. производная от функции при условии, что все аргументы остаются постоянными.
8. Производная функции определяет:
a. изменение функции при заданном изменении аргумента;
b. изменение аргумента при заданном изменении функции;
c. изменение аргумента при заданном значении функции;
d. изменение функции при заданном значении аргумента;
e. скорость изменение функции при изменении аргумента.
9. Дифференциал функции – это:
a. полное приращение функции при заданном изменении аргумента;
b. квадрат приращения функции при заданном изменении аргумента;
c. квадратный корень из приращения функции при заданном изменении аргумента;
d. главная линейная часть приращения функции при заданном изменении аргумента;
e. изменение функции при заданном изменении аргумента.
10. Производной второго порядка называется:
a. квадрат производной первого порядка;
b. производная от производной первого порядка;
c. корень квадратный от производной первого порядка;
d. первообразная функции;
e. первообразная производной первого порядка.
11. Полным дифференциалом функции нескольких переменных называется:
a. главная линейная часть приращения функции при изменении одного из аргументов;
b. главная линейная часть приращения функции при изменении логарифма одного из аргументов;
c. квадрат приращения функции при изменении всех аргументов;
d. главная линейная часть приращения функции при изменении всех аргументов;
e. приращения функции при изменении всех аргументов.
12. Первообразной функции y = f(x) называется:
a. функция, производная которой равна заданной функции (функции y = f(x));
b. функция, равная сумме y = f(x) + C, где C – произвольная константа;
c. функция, равная 2 f(x+C), где C – произвольная константа;
d. C f(x), где C – произвольная константа;
e. функция, равная 2 f(x).
13. Каждая функция y = f(x) имеет:
a. одну первообразную функцию;
b. ровно 2 первообразных функций;
c. ни одной первообразной функции;
d. несколько первообразных функций;
e. множество первообразных функций.
14. Неопределенным интегралом функции y = f(x) называется:
a. первообразная функции y = f(x);
b. квадрат первообразной функции y = f(x);
c. сумма всех первообразных функции y = f(x);
d. совокупность всех первообразных функции y = f(x);
e. произведение всех первообразных функции y = f(x).
15. Метод интегрирования по частям применим при интегрировании:
a. суммы или разности нескольких функций;
b. сложной функции;
c. линейной комбинации функций;
d. произведения функций;
e. любой комбинации любых функций.
16. Метод замены переменных применим при интегрировании:
a. суммы или разности нескольких функций;
b. произведения функций;
c. линейной комбинации функций;
d. сложных функций;
e. любой комбинации любых функций.

Критерии оценки
«Зачтено» – выполнение верно более 60% заданий.
«Не зачтено» – выполнение 60% и менее заданий верно.

Примерные вопросы "Текущий контроль 1"
1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

2. Понятие о дифференциальном уравнении. Решения и интегральные кривые.

3. Уравнение первого порядка, его решение и геометрическое истолкование.

4. Задача Коши.

5. Механическое толкование уравнения первого порядка.

6. Уравнение с разделяющимися переменными.

7. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.

8. Квазиоднородные уравнения.

9. Линейные уравнения первого порядка. Методы их решения.

10. Уравнения Бернулли и Риккати.

11. Уравнения в полных дифференциалах.

12. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Доказательство существования.

13. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Доказательство единственности.

14. Особые точки уравнения первого порядка (фокус, центр, седло, узел).

15. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной – степенные.

16. Уравнения первого порядка, не содержащие одной переменной.

17. Общий метод введения параметра при решении уравнений, не разрешенных относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.

18. Особые решения уравнений первого порядка. Дискриминантная кривая, огибающая.

19. Задача о траекториях. Изогональные траектории.

20. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений высших порядков.

Критерии оценки
«Удовлетворительноо» – выполнение верно более 60% заданий.

«Не зачтено» – выполнение 60% и менее заданий верно.

Примерные вопросы "Текущий контроль 2"

1. Некоторые типы уравнений высшего порядка, разрешимые в квадратурах.

2. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка.

3. Линейные уравнения высших порядков и их свойства.

4. Общее решение линейного однородного уравнения высшего порядка.

5. Линейные неоднородные уравнения высшего порядка. Общее решение.

6. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение.

7. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение.

8. Применение тригонометрических рядов к решению линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

9. Уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

10. Приведение уравнения второго порядка к самосопряженному.

11. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

12. Физическая трактовка нормальной системы и её решение.

13. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

14. Общее и частное решения нормальной системы.

15. Связь между уравнениями высших порядков и системами дифференциальных уравнений.

16. Линейные системы. Построение общего решения однородной линейной системы.

17. Общее решение неоднородной линейной системы.

18. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод исключения.

19. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера интегрирования систем дифференциальных уравнений.

20. Метод интегрируемых комбинаций интегрирования систем дифференциальных уравнений.

21. Метод Даламбера интегрирования систем дифференциальных уравнений.

22. Понятие устойчивости решения дифференциального уравнения по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

23. Автономное уравнение второго порядка. Фазовые портреты. Особые точки автономной линейной системы второго порядка.

Критерии оценки
«Зачтено» – выполнение верно более 60% заданий.
«Не зачтено» – выполнение 60% и менее заданий верно.

5.3. Темы письменных работ (эссе, рефераты, курсовые работы и др.)

Не предусмотрены

5.4. Оценочные средства для промежуточной аттестации

Перечень вопросов к экзамену

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

2. Понятие о дифференциальном уравнении. Решения и интегральные кривые.

3. Уравнение первого порядка, его решение и геометрическое истолкование.

4. Задача Коши.

5. Механическое толкование уравнения первого порядка.

6. Уравнение с разделяющимися переменными.

7. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.

8. Квазиоднородные уравнения.

9. Линейные уравнения первого порядка. Методы их решения.

10. Уравнения Бернулли и Риккати.

11. Уравнения в полных дифференциалах.

12. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Доказательство существования.

13. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Доказательство единственности.

14. Особые точки уравнения первого порядка (фокус, центр, седло, узел).

15. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной – степенные.

16. Уравнения первого порядка, не содержащие одной переменной.

17. Общий метод введения параметра при решении уравнений, не разрешенных относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.

18. Особые решения уравнений первого порядка. Дискриминантная кривая, огибающая.

19. Задача о траекториях. Изогональные траектории.

20. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнений высших порядков.

21. Некоторые типы уравнений высшего порядка, разрешимые в квадратурах.

22. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка.

23. Линейные уравнения высших порядков и их свойства.

24. Общее решение линейного однородного уравнения высшего порядка.

25. Линейные неоднородные уравнения высшего порядка. Общее решение.

26. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение.

27. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общее решение.

28. Применение тригонометрических рядов к решению линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

29. Уравнения, приводящиеся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

30. Приведение уравнения второго порядка к самосопряженному.

31. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

32. Физическая трактовка нормальной системы и её решение.

33. Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы.

34. Общее и частное решения нормальной системы.

35. Связь между уравнениями высших порядков и системами дифференциальных уравнений.

36. Линейные системы. Построение общего решения однородной линейной системы.

37. Общее решение неоднородной линейной системы.

38. Общие методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Метод исключения.

39. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера интегрирования систем дифференциальных уравнений.

40. Метод интегрируемых комбинаций интегрирования систем дифференциальных уравнений.

41. Метод Даламбера интегрирования систем дифференциальных уравнений.

42. Понятие устойчивости решения дифференциального уравнения по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость.

Критерии оценки:
- оценка «отлично» выставляется студенту, если продемонстрировано глубокое и прочное усвоение материала, т.е. последовательно, грамотно и логически стройно изложены все три вопроса билета, что определяет повышенный уровень;
- оценка «хорошо» выставляется студенту, если продемонстрировано достаточно полное усвоение материала, т.е. частично изложены первый и (или) второй вопросы билета и выполнено умение, что определяет пороговый уровень;
- оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, если продемонстрировано общее знание материала, т.е. частично изложен первый или второй вопрос и выполнено умение, что определяет пороговый уровень;
- оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, если продемонстрировано не знание материала, не владение понятийным аппаратом, т.е. отсутствует изложение вопросов билета, совокупность всего перечисленного определяет то, что уровень не сформирован.

Контрольные вопросы и задания

1. (УК-1) В какой форме записано уравнение $y'+y=1$?
А) в явной
Б) в дифференциальной
В) в неявной
Ключ: А.

2. (УК-1) Задача Коши – это
А) нахождение частного решения, удовлетворяющего заданному начальному условию
Б) нахождение частного решения, удовлетворяющего начальному условию $y(x)=0$
В) нахождение общего решения
Ключ: А.

3. (УК-1) Семейство интегральных кривых дифференциального уравнения представляет собой …
А) Общее решение $y=y(x, C)$ этого дифференциального уравнения
Б) Частное решение этого дифференциального уравнения при $C=0$
В) семейство функций, удовлетворяющих условию $y'(x)=0$.
Ключ: А.

4. (УК-1) Определите тип уравнения $x\,dx+y\,dy=0$:
А) Уравнение с разделяющимися переменными
Б) уравнение с разделенными переменными
В) уравнение в полных дифференциалах/
Ключ: А.

5. (ОПК-1) Однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки
А) y/x=t(x)
Б) y*x=t(x)
В) y+x=t(x)
Ключ: А.

6. (ОПК-1) Какой тип дифференциальных уравнений позволяет решить метод Бернулли?
А) однородные
Б) линейные
В) уравнение в полных дифференциалах
Ключ: А

7. (ОПК-1) Составьте характеристическое уравнение для дифференциального уравнения y''+4y'-5y=sin x и найдите корни.
А) k1=2, k2=-2
Б) k1=-2+i, k2=-2-i
В) k1=6, k2=-6
Ключ: В.

8. (ОПК-1)Уравнение P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 является уравнением в полных дифференциалах, если для частных производных функций P и Q выполняется условие
А) Px=Qy
Б) Py=Qx
В) Px=Qx
Ключ: Б.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л1.1	Пахаев Б.В.	Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 1: учебное пособие по направлению 01.03.01 Математика (бакалавриат)	Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2015	http://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=56:lektsii-po-teorii-obyknovennykh-differentsialnykh-uravnenij-ch-1&catid=5:mathematics&Itemid=163
Л1.2	Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие	Москва: Логос, 2010	http://www.iprbookshop.ru/9280.html
Л1.3	Арнольд В.И.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Ижевск: Институт компьютерных исследований; Регулярная и хаотическая динамика, 2019	http://www.iprbookshop.ru/92056.html
Л1.4	Понтрягин Л.С.	Обыкновенные дифференциальные уравнения	Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2019	http://www.iprbookshop.ru/92055.html

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.1	Матвеев Н.М.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие	Санкт-Петербург: Специальная литература, 1996	
Л2.2	Филиппов А.Ф.	Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учебное пособие для вузов	Москва: Наука: Физматлит, 1979	

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год	Эл. адрес
Л2.3	Кайгородов Е.В.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие для бакалавров по направлениям 010100.62 "Математика" и 011200.62 "Физика"	Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2014	http://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=310:obyknovennye-differentsialnye-uravneniya&catid=5:mathematics&Itemid=163
Л2.4	Пахаев Б.В.	Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ч. 2: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 01.03.01 Математика (бакалавриат) и 02.03.01 Математика и компьютерные науки (бакалавриат)	Горно-Алтайск: РИО ГАГУ, 2016	http://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=145:lektsii-po-teorii-obyknovennykh-differentsialnykh-uravnenij-ch-2&catid=5:mathematics&Itemid=163
Л2.5	Пахаев Б.В.	Рабочая тетрадь практических занятий по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 01.03.01 Математика (бакалавриат) и 02.03.01 Математика и компьютерные науки (бакалавриат)	Горно-Алтайск: БИЦ ГАГУ, 2017	http://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=2131:rabochaya-tetrad-prakticheskikh-zanyatij-po-teorii-obyknovennykh-differentsialnykh-uravnenij-chast-1&catid=5:mathematics&Itemid=163
Л2.6	Пахаев Б.В.	Рабочая тетрадь практических занятий по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (часть 2): учебное пособие	Горно-Алтайск: БИЦ ГАГУ, 2018	http://elib.gasu.ru/index.php?option=com_abook&view=book&id=2797:878&catid=5:mathematics&Itemid=163
Л2.7	Юмагулов М.Г.	Обыкновенные дифференциальные уравнения: теория и приложения: учебное пособие	Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика; Институт компьютерных исследований, 2019	http://www.iprbookshop.ru/91969.html

6.3.1 Перечень программного обеспечения	
6.3.1.1	MatLab
6.3.1.2	Moodle
6.3.1.3	Google Chrome
6.3.1.4	Kaspersky Endpoint Security для бизнеса СТАНДАРТНЫЙ
6.3.1.5	MS Office
6.3.1.6	MS WINDOWS
6.3.1.7	NVDA
6.3.1.8	Яндекс.Браузер
6.3.1.9	LibreOffice

6.3.1.10	РЕД ОС
6.3.2 Перечень информационных справочных систем	
6.3.2.1	Межвузовская электронная библиотека
6.3.2.2	Электронно-библиотечная система IPRbooks
6.3.2.3	База данных «Электронная библиотека Горно-Алтайского государственного университета»

7. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ		
	проблемная лекция	
	конференция	
	дискуссия	

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)		
Номер аудитории	**Назначение**	**Основное оснащение**
222 Б1	Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Переносной проектор, ноутбук, экран
207 Б1	Лекционная аудитория. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации	Ученическая доска, проектор, экран, системный блок, посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся), рабочее место преподавателя
209 Б1	Компьютерный класс. Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации. Помещение для самостоятельной работы	Рабочее место преподавателя. Посадочные места обучающихся (по количеству обучающихся). Маркерная ученическая доска, экран, мультимедиапроектор, компьютеры с доступом в Интернет

9. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекции, с одной стороны – это одна из основных форм учебных занятий в высших учебных заведениях, представляющая собой систематическое, последовательное устное изложение преподавателем определенного раздела конкретной науки или учебной дисциплины, с другой – это особая форма самостоятельной работы с учебным материалом. Лекция не заменяет собой книгу, она только подталкивает к ней, раскрывая тему, проблему, выделяя главное, существенное, на что следует обратить внимание, указывает пути, которым нужно следовать, добиваясь глубокого понимания поставленной проблемы, а не общей картины.
Работа на лекции – это сложный процесс, который включает в себя такие элементы как слушание, осмысление и собственно конспектирование. Для того, чтобы лекция выполнила свое назначение, важно подготовиться к ней и ее записи еще до прихода преподавателя в аудиторию. Без этого дальнейшее восприятие лекции становится сложным. Лекция в университете рассчитана на подготовленную аудиторию. Преподаватель излагает любой вопрос, ориентируясь на те знания, которые должны быть у студентов, усвоивших материал всех предыдущих лекций. Важно научиться слушать преподавателя во время лекции, поддерживать непрерывное внимание к выступающему.
Однако, одного слушания недостаточно. Необходимо фиксировать, записывать тот поток информации, который сообщается во время лекции – научиться вести конспект лекции, где формулировались бы наиболее важные моменты, основные положения, излагаемые лектором. Для ведения конспекта лекции следует использовать тетрадь. Ведение конспекта на листочках не рекомендуется, поскольку они не так удобны в использовании и часто теряются. При оформлении конспекта лекции необходимо оставлять поля, где студент может записать свои собственные мысли, возникающие параллельно с мыслями, высказанными лектором, а также вопросы, которые могут возникнуть в процессе слушания, чтобы получить на них ответы при самостоятельной проработке материала лекции, при изучении рекомендованной литературы или непосредственно у преподавателя в конце лекции. Составляя конспект лекции, следует оставлять значительный интервал между строчками. Это связано с тем, что иногда возникает необходимость вписать в первоначальный текст лекции одну или несколько строчек, имеющих принципиальное значение и почерпнутых из других источников. Расстояние между строками необходимо также для подчеркивания слов или целых групп слов (такое подчеркивание вызывается

необходимостью привлечь внимание к данному месту в тексте при повторном чтении). Обычно подчеркивают определения, выводы.
Также важно полностью без всяких изменений вносить в тетрадь схемы, таблицы, чертежи и т.п., если они предполагаются в лекции. Для того, чтобы совместить механическую запись с почти дословным фиксированием наиболее важных положений, можно использовать системы условных сокращений. В первую очередь сокращаются длинные слова и те, что повторяются в речи лектора чаще всего. При этом само сокращение должно быть по возможности кратким.
Семинарские (практические) занятия Самостоятельная работа студентов по подготовке к семинарскому (практическому) занятию должна начинаться с ознакомления с планом семинарского (практического) занятия, который включает в себя вопросы, выносимые на обсуждение, рекомендации по подготовке к семинару (практическому занятию), рекомендуемую литературу к теме. Изучение материала следует начать с просмотра конспектов лекций. Восстановив в памяти материал, студент приводит в систему основные положения темы, вопросы темы, выделяя в ней главное и новое, на что обращалось внимание в лекции. Затем следует внимательно прочитать соответствующую главу учебника.
Для более углубленного изучения вопросов рекомендуется конспектирование основной и дополнительной литературы. Читая рекомендованную литературу, не стоит пассивно принимать к сведению все написанное, следует анализировать текст, думать над ним, этому способствуют записи по ходу чтения, которые превращают чтение в процесс. Записи могут вестись в различной форме: развернутых и простых планов, выписок (тезисов), аннотаций и конспектов.
Подобрав, отработав материал и усвоив его, студент должен начать непосредственную подготовку своего выступления на семинарском (практическом) занятии для чего следует продумать, как ответить на каждый вопрос темы.
По каждому вопросу плана занятий необходимо подготовиться к устному сообщению (5-10 мин.), быть готовым принять участие в обсуждении и дополнении докладов и сообщений (до 5 мин.).
Выступление на семинарском (практическом) занятии должно удовлетворять следующим требованиям: в нем излагаются теоретические подходы к рассматриваемому вопросу, дается анализ принципов, законов, понятий и категорий; теоретические положения подкрепляются фактами, примерами, выступление должно быть аргументированным.
Лабораторные работы являются основными видами учебных занятий, направленными на экспериментальное (практическое) подтверждение теоретических положений и формирование общепрофессиональных и профессиональных компетенций. Они составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки.
В процессе лабораторной работы как вида учебного занятия студенты выполняют одно или несколько заданий под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.
При выполнении обучающимися лабораторных работ значимым компонентом становятся практические задания с использованием компьютерной техники, лабораторно - приборного оборудования и др. Выполнение студентами лабораторных работ проводится с целью: формирования умений, практического опыта (в соответствии с требованиями к результатам освоения дисциплины, и на основании перечня формируемых компетенций, установленными рабочей программой дисциплины), обобщения, систематизации, углубления, закрепления полученных теоретических знаний, совершенствования умений применять полученные знания на практике.
Состав заданий для лабораторной работы должен быть спланирован с расчетом, чтобы за отведенное время они могли быть выполнены качественно большинством студентов.
При планировании лабораторных работ следует учитывать, что в ходе выполнения заданий у студентов формируются умения и практический опыт работы с различными приборами, установками, лабораторным оборудованием, аппаратурой, программами и др., которые могут составлять часть профессиональной практической подготовки, а также исследовательские умения (наблюдать, сравнивать, анализировать, устанавливать зависимости, делать выводы и обобщения, самостоятельно вести исследование, оформлять результаты).
Выполнению лабораторных работ предшествует проверка знаний студентов - их теоретической готовности к выполнению задания.
Формы организации студентов при проведении лабораторных работ: фронтальная, групповая и индивидуальная. При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу. При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется группами по 2 - 5 человек. При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.
Текущий контроль учебных достижений по результатам выполнения лабораторных работ проводится в соответствии с системой оценивания (рейтинговой, накопительной и др.), а также формами и методами (как традиционными, так и инновационными, включая компьютерные технологии), указанными в рабочей программе дисциплины (модуля). Текущий контроль проводится в пределах учебного времени, отведенного рабочим учебным планом на освоение дисциплины, результаты заносятся в журнал учебных занятий.
Объем времени, отводимый на выполнение лабораторных работ, планируется в соответствии с учебным планом ОПОП. Перечень лабораторных работ в РПД, а также количество часов на их проведение должны обеспечивать реализацию требований к знаниям, умениям и практическому опыту студента по дисциплине (модулю) соответствующей ОПОП.
Самостоятельная работа обучающихся – это планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа, выполняемая во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.
Объем самостоятельной работы определяется учебным планом основной профессиональной образовательной программы (ОПОП), рабочей программой дисциплины (модуля).
Самостоятельная работа организуется и проводится с целью формирования компетенций, понимаемых как способность применять знания, умения и личностные качества для успешной практической деятельности, в том числе:
- формирования умений по поиску и использованию нормативной, правовой, справочной и специальной литературы, а также других источников информации;
- качественного освоения и систематизации полученных теоретических знаний, их углубления и расширения по применению на уровне межпредметных связей;
- формирования умения применять полученные знания на практике (в профессиональной деятельности) и закрепления практических умений обучающихся;

- развития познавательных способностей, формирования самостоятельности мышления обучающихся;
- совершенствования речевых способностей обучающихся;
- формирования необходимого уровня мотивации обучающихся к систематической работе для получения знаний, умений и владений в период учебного семестра, активности обучающихся, творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования способностей к саморазвитию (самопознанию, самоопределению, самообразованию, самосовершенствованию, самореализации и саморегуляции);
- развития научно-исследовательских навыков;
- развития навыков межличностных отношений.

К самостоятельной работе по дисциплине (модулю) относятся: проработка теоретического материала дисциплины (модуля); подготовка к семинарским и практическим занятиям, в т.ч. подготовка к текущему контролю успеваемости обучающихся (текущая аттестация); подготовка к лабораторным работам; подготовка к промежуточной аттестации (зачётам, экзаменам).
Виды, формы и объемы самостоятельной работы обучающихся при изучении дисциплины (модуля) определяются:
- содержанием компетенций, формируемых дисциплиной (модулем);
- спецификой дисциплины (модуля), применяемыми образовательными технологиями;
- трудоемкостью СР, предусмотренной учебным планом;
- уровнем высшего образования (бакалавриат, специалитет, магистратура, аспирантура), на котором реализуется ОПОП;
- степенью подготовленности обучающихся.

Курсовая работа является самостоятельным творческим письменным научным видом деятельности студента по разработке конкретной темы. Она отражает приобретенные студентом теоретические знания и практические навыки. Курсовая работа выполняется студентом самостоятельно под руководством преподавателя.
Курсовая работа, наряду с экзаменами и зачетами, является одной из форм контроля (аттестации), позволяющей определить степень подготовленности будущего специалиста. Курсовые работы защищаются студентами по окончании изучения указанных дисциплин, определенных учебным планом.
Оформление работы должно соответствовать требованиям. Объем курсовой работы: 25–30 страниц. Список литературы и Приложения в объем работы не входят. Курсовая работа должна содержать: титульный лист, содержание, введение, основную часть, заключение, список литературы, приложение (при необходимости). Курсовая работа подлежит рецензированию руководителем курсовой работы. Рецензия является официальным документом и прикладывается к курсовой работе.
Тематика курсовых работ разрабатывается в соответствии с учебным планом. Руководитель курсовой работы лишь помогает студенту определить основные направления работы, очертить её контуры, указывает те источники, на которые следует обратить главное внимание, разъясняет, где отыскать необходимые книги.
Составленный список источников научной информации, подлежащий изучению, следует показать руководителю курсовой работы.
Курсовая работа состоит из глав и параграфов. Вне зависимости от решаемых задач и выбранных подходов структура работы должна содержать: титульный лист, содержание, введение, основную часть; заключение; список литературы; приложение(я).
Во введении необходимо отразить: актуальность; объект; предмет; цель; задачи; методы исследования; структура работы.
Основную часть работы рекомендуется разделить на 2 главы, каждая из которых должна включать от двух до четырех параграфов.
Содержание глав и их структура зависит от темы и анализируемого материала.
Первая глава должна иметь обзорно–аналитический характер и, как правило, является теоретической.
Вторая глава по большей части раскрывает насколько это возможно предмет исследования. В ней приводятся практические данные по проблематике темы исследования.
Выводы оформляются в виде некоторого количества пронумерованных абзацев, что придает необходимую стройность изложению изученного материала. В них подводится итог проведённой работы, непосредственно выводы, вытекающие из всей работы и соответствующие выявленным проблемам, поставленным во введении задачам работы; указывается, с какими трудностями пришлось столкнуться в ходе исследования.
Правила написания и оформления курсовой работы регламентируются Положением о курсовой работе (проекте), утвержденным решением Ученого совета ФГБОУ ВО ГАГУ от 27 апреля 2017 г.

Контрольная работа - средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу.

Контрольная работа №1.

1. Найти общий интеграл $\psi(x,y) = C$ дифференциального уравнения:

В.1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2y dy - 2xy^2dx$; В.2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

В.3. $\sqrt{4+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$; В.4. $\sqrt{3+y^2}\,dx - y\,dy = x^2y\,dy$;

В.5. $6x\,dx - 6y\,dy = 2x^2y\,dy - 3xy^2\,dx$; В.6. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$;

В.7. $(e^{2x} + 5)\,dy + ye^{2x}dx = 0$; В.8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$;

В.9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$; В.10. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$.

2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

В.1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$;

В.2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$;

В.3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

В.4. $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$;

В.5. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$;

В.6. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$;

В.7. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$;

В.8. $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

В.9. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$;

В.10. $xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$.

3. Найти решение задачи Коши:

В.1. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0$;

В.2. $y' - y\,ctg\,x = 2x\sin x$, $y(\dfrac{\pi}{2}) = 0$;

В.3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $y(0) = 0$;

В.4. $y' + y\,tg\,x = \cos^2 x$, $y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}$;

В.5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \dfrac{3}{2}$; В.6. $2(y' + xy) = (1 + x)\, e^{-x} y^2, \quad y(0) = 2$;

В.7. $y' - \dfrac{y}{x} = x \sin x, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$; В.8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x\,, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$;

В.9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2\,, \quad y(1) = 1$; В.10. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}\, e^x\,, \quad y(1) = e$.

4. Найти решение задачи Коши:

В.1. $y' + xy = (1 + x)\, e^{-x}\, y^2\,, \quad y(0) = 1$; В.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x\,, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}$;

В.3. $2(xy' + y) = xy^2\,, \quad y(10) = 2$; В.4. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)\, e^{-4x}\, y^2\,, \quad y(0) = 1$;

В.5. $xy' - y = -y^2 (\ln x + 2) \ln x\,, \; y(1)=1$; В.6. $y' - \dfrac{1}{x+1}\, y = e^x (x + 1)\,, \quad y(0) = 1$;

В.7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x\,, \quad y(1) = 3$; В.8. $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x\, (1 + \sin x),\; y(0)=1$;

В.9. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3)\,, \; y(0) = -1$; В.10. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4\,, \; y(1) = 1.$

5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

В.1. $3x^2 e^y\, dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$; В.2. $(3x^2 + \dfrac{2}{y} \cos \dfrac{2x}{y})dx - \dfrac{2x}{y^2} \cos \dfrac{2x}{y^2}\, dy = 0$;

В.3. $(3x^2 + 4y^2)\, dx + (8xy + e^y)\, dy = 0$; В.4. $(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2})\, dx - (2y - \dfrac{1}{x})\, dy = 0$;

В.5. $(y^2 + y \sec^2 x)\, dx + (2xy + tg\, x)\, dy = 0$; В.6. $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$;

В.7. $(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y})dx + (\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2})dy = 0$;

В.8. $[\sin 2x - 2\cos(x + y)]dx - 2 \cos\, (x + y)\, dy = 0$;

В.9. $(xy^2 + \dfrac{x}{y^2})dx + (x^2 y - \dfrac{x^2}{y^3})dy = 0$;

В.10. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0$.

6. Найти решение задачи Коши:

В.1. $4y^3 y'' = y^4 - 1\,, \quad y(0) = \sqrt{2}\,, \quad y'(0) = 1/(2\sqrt{2})$;

В.2. $y'' = 128y^3\,, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8$; В.3. $y'' y^3 + 64 = 0, \; y(0) = 4, \quad y'(0) = 2$;

В.4. $y'' + 2\sin y \cos^3 y + 0,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1;$

В.5. $y'' = 32\sin^3 y \cos y = 0,\ \ y(1) = \pi/2,\ \ y'(1) = 4;$

В.6. $y'' = 98 y^3,\ \ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 7,$ В.8. $y^3 y'' + 49 = 0,\ y(3) = -7,\ \ y'(3) = -1;$

В.8. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1,\ \ y(0) = \sqrt{2}/2,\ \ y'(0) = 1/\sqrt{2};$

В.9. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2;$

В.10. $y'' = 72 y^3,\ \ y(2) = 1,\ \ y'(2) = 6.$

7. Проинтегрировать однородное линейное уравнение:

В.1. $y^{(4)} + y = 0$; В.2. $y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0$; В.3. $y^{(4)} - y = 0$;

В.4. $y^{(6)} - y = 0$; В.5. $y^{(6)} + y = 0$; В.6. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$;

В.7. $y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$; В.8. $y''' + y'' + 0$; В.10. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$;

В.10. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.

8. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения:

В.1. $y''' + y'' - 6y' = (20x + 14)\, e^{2x}$; В.2. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)\, e^{-x}$;

В.3. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)\, e^{x}$; В.4. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)\, e^{x}$;

В.5. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)\, e^{x}$; В.6. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)\, e^{-x}$;

В.7. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)\, e^{x}$; В.8. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)\, e^{x}$;

В.9. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)\, e^{x}$; В.10. $y''' - 6y'' + 9y' = 4x\, e^{x}$.

9. Найти общее решение неоднородного линейного уравнения:

В.1. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 6x$; В.2. $y'' - 4y' + 8y = e^{x} (-\sin x + 2\cos x)$;

В.3. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$; В.4. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$;

В.5. $y'' + 2y' = 3e^{x} (\sin x + \cos x)$; В.6. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;

В.7. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$; В.8. $y'' + 2y' = 6\, e^{x} (\sin x + \cos x)$;

В.9. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$; В.10. $y'' + 2y' = 10\, e^{x} (\sin x + \cos x)$.

Контрольная работа №2.

1. Привести к нормальной системе следующее линейное уравнение:

В.1) $y''' + y'' + y' + y = 0$; В.2) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

В.3) $y''' - 3y'' + y' - y = 0$; В.4) $y''' + 4y' + 4y = 0$;

В.5) $y^{IV} + x^2 y = 0$; В.6) $y^{IV} + y'e^{x} - xy = \cos ax$;

В.7) $y''' - 2y'' - 4y' + y = 0$; В.8) $y^{IV} + y'' - 4y = 0$;

В.9) $y^{V} + y''' - y = \sin x$; В.10) $y''' - 2y'' - 2y' + y = e^{x}$.

2. Решить систему методом исключения:

В.1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = z - 1 \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2 \end{cases}$; В.2) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x \end{cases}$;

В.3) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = y \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = x \end{cases}$; В.4) $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + x = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0 \end{cases}$;

В.5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -9y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$; В.6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t \\ \dfrac{dy}{dt} = x - t \end{cases}$;

В.7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + 4y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$; В.8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$;

В.9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - y \end{cases}$; В.10) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \end{cases}$;

3. Решить систему методом интегрируемых комбинаций:

В.1) $\left\{ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}; \right.$ В.2) $\left\{ \dfrac{dx}{x+y} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}; \right.$

В.3) $\left\{ \dfrac{dx}{z-y} = \dfrac{dy}{x-z} = \dfrac{dz}{y-x}; \right.$ В.4) $\left\{ \dfrac{dy}{z} = \dfrac{dz}{y} = \dfrac{dx}{(z-y)^2}; \right.$

В.5) $\left\{\frac{zdy}{z-1}=\frac{(y-x)dz}{1}=\frac{-zdx}{-z}\right.$; В.6) $\left\{\frac{dx}{xt}=\frac{dy}{-yt}=\frac{dt}{xy}\right.$;

В.7) $\left\{\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{dp}{q}=-\frac{dq}{p}\right.$; В.8) $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=\frac{z}{(z-y)^3} \\ \frac{dz}{dx}=\frac{y}{(z-y)^2}\end{cases}$;

В.9) $\left\{\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}\right.$; В.10) $\left\{\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{mu}\right.$.

4. Решить систему методом Эйлера:

В.1) $\begin{cases}y'=y+z, y(0)=0 \\ z'=-2y+4z, z(0)=-1\end{cases}$; В.2) $\begin{cases}y'=3y-z, y(0)=1 \\ z'=10y-4z, z(0)=5\end{cases}$;

В.3) $\begin{cases}y'=y-z \\ z'=-4y+4z\end{cases}$; В.4) $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=4x+5y \\ \frac{dy}{dt}=-4x-4y\end{cases}$;

В.5) $\begin{cases}y'=2y+z \\ z'=-6y-3z\end{cases}$; В.6) $\begin{cases}y'=y+z \\ z'=-10y-z\end{cases}$;

В.7) $\begin{cases}y'=2y-3z \\ z'=3y+2z\end{cases}$; В.8) $\begin{cases}y'=y-2z \\ z'=6y-5z\end{cases}$;

В.9) $\begin{cases}y'=4y-5z \\ z'=y, y(0)=0, z(0)=1\end{cases}$; В.10) $\begin{cases}y'=y-z, z(0)=1 \\ z'=z-y, y(0)=0\end{cases}$.

5. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость решения следующих уравнений:

В.1) $\frac{dx}{dt}=2x+t$; x(0)=1; В.2) $\frac{dx}{dt}=2t(x+1), x(0)=0$;

В.3) $\frac{dx}{dt}=-x+t^2, x(1)=1$; В.4) $\frac{dx}{dt}=2+t, x(0)=1$;

В.5) $3(t-1)\frac{dx}{dt}=x, x(0)=1$; В.6) $\frac{dx}{dt}=4x-t^2x, x(0)=0$;

В.7) $\frac{dx}{dt} = t - x, x(2) = 0$; В.8) $2t\frac{dx}{dt} = x - x^3, x(1) = 0$;

В.9) $\frac{dx}{dt}(t+1) = x, x(1) = 1$; В.10) $\frac{dy}{dx} = x^2 - y, y(0) = 1.$

6. Исходя из определения устойчивости по Ляпунову, исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем уравнений вблизи точки (0,0):

В.1) $\frac{dx}{dt} = -x, \frac{dy}{dt} = -2y$; В.2) $\frac{dx}{dy} = x, \frac{dy}{dt} = 2y$; В.3) $\frac{dx}{dt} = -x, \frac{dy}{dt} = y$;

В.4) $\frac{dx}{dt} = -y, \frac{dy}{dx} = 2x^3$; В.5) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = -\sin x$; В.6) $\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = x^3\left(1 + y^2\right)$;

В.7) $\frac{dx}{dt} = -y\cos x, \frac{dy}{dt} = \sin x$; В.8) $\frac{dx}{dt} = x - 6y, \frac{dy}{dt} = 1/2x - 2y$;

В.9) $\frac{dx}{dt} = -x - 9y, \frac{dy}{dt} = x - y$; В.10) $\frac{dx}{dt} = 2x, \frac{dy}{dt} = y.$

3) Индивидуальные задания.

Индивидуальные задания – это задания на самостоятельное решение задач по курсу Дифференциальные уравнения, в отличие от контрольной работы, выполняемой на практическом занятии. При выполнении индивидуального задания студент может использовать любую справочную литературу, в том числе, в электронном виде. Индивидуальное задание оценивается оценкой «зачтено» или «не зачтено». При получении оценки «не зачтено» студент продолжает работу над индивидуальным заданием до получения оценки «зачтено».

Индивидуальные задания № 1.

1. Проверьте, являются ли указанные функции решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

В.1. $y = 5e^{-2x} - 2x + 1$ $y' + 2y = -4x$

В.2. $y = 1/x$ $y'^2 = x^2 + y^2$

В.3. $y = cos2x$ $y' = -2xy$

В.4. $y = sin2x$ $y'' + 4y' = 0$

В.5. $y = (c^2 - x^2)/ 2^x$ $(x + y)dx + xdy = 0$

В.6. $y = 2e^{\sqrt{1-x^2}}$ $xydx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

В.7. x = $5sint,\ y = 2cost$ $y' = -(4/25)(x/y)$

В.8. $x = te^t,\ y = e^{-t}$ $y' = x/y$

В.9. $x = cost,\ e = sint$ $(1 + xy)' + y^2 = 0$

В.10. $x = te^t,\ y = e^{-t}$ $y' = -x/y$

2. Проинтегрировать заданные дифференциальные уравнения.

В.1. *а)* $y' = 9y^2 - 4;$ *б)* $-(x - 3y)dx = (2x - 6y + 2)dy;$ *в)* $y^3dy + 3xy^2dx + 2x^3dx = 0;$

г) $2x^4yy' + y^4 = 4x^6;$ *д)* $y' - ytgx = ½;$ *е)* $y' = y^2e^x - 2y;$

ж) $(4 - y^2/x^2)dx + 2y/xdy = 0;$ *з)* $(x + y^2)dx + 2xydy = 0;$

В.2. *а)* $xy' = yln/y/;$ *б)* $(x + 2y - 1)dx + (2x + 4y + 1)dy = 0;$

в) $y^3dy + 3xy^2d[+ 2x^3dx = 0;$ *г)* $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y';$

д) $xy' - y = x^2cosx;$ *е)* $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2;$ *ж)* $(y/x)dx + (y^3 + lnx)dy = 0;$

з) $xy^2y' = x^2 + y^3;$

В.3. *а)* $y'tgx - y = 1;$ *б)* $y' = (4x + y - 1)^2;$ *в)* $y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0;$

г) $(y + 2)dx - (2x + y - 4)dy = 0;$ *д)* $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y};$

е) $y' - 2y/(x + 1) = (x + 1)^{5/2};$ *ж)* $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0;$

з) $y' = y^4cosx + y\,tgx;$

В.4. *а)* $e^t(1 + dt/dx) = 1;$ *б)* $y' = 3^{x+y};$ *в)* $(2xy + y^2)dx + (2xy + x^2)de = 0;$

г) $(2y - 4x + 6)dy + (y + x - 3)dx = 0;$ *д)* $x(x-1)y' - (x + 1)y + 4 = 0;$

е) $y' + 2y = y^2e^x;$ *ж)* $3x^2(1 + lny)dx = (2y - x^3/y)dy;$ *з)* $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y;$

В.5. *а)* $2y\,siny\,dx + x(\,siny + y\,cosy)\,dy = 0;$ *б)* $(x - 3y)dx + (2x - 6y + 2)dy = 0;$

в) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2};$ *г)* $2x^2y' = y^3 + xy;$ *д)* $(2e^y - x)y' = 1;$

е) $y' - y = (1 + x)y^2;$ *ж)* $(x + y^2)dy = ydx;$ *з)* $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0;$

В.6. *а)* $e^{-t}(1 + dt/dx) = 1;$ *б)* $y' - y = 2t - 3;$ *в)* $y' = 2xy/(3x^2 - y^2);$

г) $2y' + x = 4\sqrt{y}$; *д)* $xy' - y = 2x$; *е)* $3xy' - 2y = x^3/y^2$;

ж) $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1+y^2}$; *з)* $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - x^3/y)dy$;

В.7. *а)* $y' = 9y^2 - 4$; *б)* $y = xy' - 2y' + 1$; *в)* $y' = (y/x)(1 + \ln y - \ln x)$;

г) $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$; *д)* $y' + y = x + 2$; *е)* $xy' - 4y = 2x^2\sqrt{y}$;

ж) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$; *з)* $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$; .

В.8. *а)* $xy' = y \ln |y|$; *б)* $y' = (x + y)^2$; *в)* $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$;

г) $(y+2)dx - (2x + y - 4)dy = 0$; *д)* $y' + y = x^2 - 1$; *е)* $y' + 2y = y^3e^x$;

ж) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$; *з)* $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy$;

В.9. *а)* $y' \mathrm{tg} x - y = 1$; *б)* $(x^2y + x)\, dy + (xy^2 - y)dx = 0$;

в) $y \cos x\, dx + (2y - \sin x)dy = 0$; *г)* $2xdy = (x^2y^4 + 1)\, ydx$;

д) $y' - 4y = e^{2x}$; *е)* $y' - y = (1 + x)\, y^2$; *ж)* $y(x + y)dx + (xy + 1)\, dy = 0$;

з) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;

В.10. *а)* $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dy + ydx = 0$; *б)* $y' = 3^{x+y}$;

в) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$; *г)* $2y' + x = 4\sqrt{y}$;

д) $xy' - y = 2x$; *е)* $y' + 2xy = 2x^3y^3$; *ж)* $((3x^2+y^2)/y^2)dx - ((2x^3 + 5y)/y^3)dy = 0$;

з) $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2y)dy$;

3. Найти частные решения, удовлетворяющие начальным условиям.

В.1. *а)* $y' + y \cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 2$;

б) $(1 + x/y)dx + e^{x/y}(1 - x/y)dy = 0$, $y(0) = 2$.

В.2. *а)* $xy' + y - e^x = 0$, $y(a) = b$; *б)* $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y(1) = 1$.

В.3. а) $xy' - y/(x+1) = x$, $y(0) = 1$; б) $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y(e) = 1$.

В.4. а) $y' + x^2y = x^2$, $y(2) = 1$; б) $xy' = y/\ln x$, $y(e) = 1$.

В.5. а) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 1/\cos x$, $y(0) = 0$;

б) $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xy\,dy = 0$, $y(1) = \pi/2$.

В.6. а) $y' = x/(1 - x^2)$, $y(0) = 1$; б) $y' = 9y^2 - 4$, $y(0) = 1$.

В.7. а) $y' - y/(1-x^2) - 1 - x = 0$, $y(0) = 0$;

б) $(x/(x^2 + y^2))dy = (y/(x^2 + y^2))dx - dx$, $y(2) = 2$.

В.8. а) $(2e^y - x)y' = 1$, $y(0) = 1$;

б) $(\sin y + y\sin x + 1/x)dx + (x\cos y - \cos x + 1/y)dy = 0$, $y(\pi/2) = \pi$.

В.9. а) $y' = x/(1 - x^2)$, $y(0) =$; б) $y' = 9y^2 - 4$, $y(0) = 1$.

В.10. а) $xdy + (x + y)dx = 0$, $y(1) = 1$; б) $y'\cos x = y/\ln y$, $y(0) = 1$.

4. Методом изоклин построить несколько интегральных кривых.

В.1. $y' = x + y$; В.2. $y' = 2x - y$; В.3. $y' = y - x$; В.4. $y' = x(y - 1)$;

В.5. $y' = x + 1$; В.6. $y' = (½)(x - 2y + 3)$; В.7. $y' = x^2 + y^2$; В.8. $y' = x^2 - y^2$;
В.9. $y' = y - x^2$; В.10. $y' = y/2x$.

5. Найти все решения данных уравнений; выделить особые решения (если они есть):

В.1. а) $yy'^2 - (xy + 1)y + x = 0$; б) $2yy' = x(y'^2 + 4)$; в) $y'^2 - 4y = 0$;
г) $y = y'^2 - xy' + x^2/2$.

В.2. а) $y'^3 - y'/4x = 0$; б) $y = x(1 + y') + y'^2$; в) $y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$;
г) $(xy' + y)^2 = y^2y'$.

В.3. а) $y'^2 - 8y = 0$; б) $y = -xy' + y'^2$; в) $y'^2 - y^2 = 0$;
г) $y^2y'^2 + y^2 = 1$.

В.4. $a)\ y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$; б) $2y(y' + 2) = xy'^2$; в) $y' = \sqrt[3]{y^2} - 8$;

г) $y'^2 - yy' + e^x = 0$.

В.5. а) $y'^2 = 4|y|$; б) $y = xy' - y'^2$; в) $(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0$;

г) $3xy'^2 - 6yy' + x + 2y = 0$.

В.6. а) $yy' + y'^2 = x^2 + xy$; б) $y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}$; в) $y(y - 2xy')^2 = 2y'$;

г) $y = xy' + \sqrt{a^2y'^2 + b^2}$.

В.7. а) $y'^2 = \frac{1}{4|x|}$; б) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$; в) $8y'^3 - 12y'^2 = 27(y - x)$;

г) $y' = (x - y)^2 + 1$.

В.8. а) $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$; б) $y = xy' + y'^2 - y'$; в) $y'^2 = 9y^2$;

г) $y(y - 2xy')^2 = 2y'$.

В.9. а) $y^2(1 + y'^2) = a^2$; б) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}$; в) $x^2 + xy' = 3x + y'$;

г) $xy^2y' - y^3 = \frac{1}{3}x^4$.

В.10. а) $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$; б) $y = 2xy' - y'^2$; в) $xyy' - y^2 = x^4$;

г) $y' - 1 = e^{x + 2y}$.

6. Составить дифференциальное уравнение одно- или двухпараметрического семейства линий.

В.1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1}$; В.2. $y = a(1 - e^{-x/a})$; В.3. $y = \frac{a}{x}$; В.4. $x^2 - y^2 = ax$;

В.5. $y = ax^2 + bx + c$; В.6. $y = a\,e^{x/a}$; В.7. $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3$;

В.8. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 1$; В.9. $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$; В.10. $y = e^x(ax + b)$.

7. Найти общее решение уравнения, допускающего понижение порядка.

В.1. $а)\ y^{IY} = x\ ;\quad б)\ y' = xy'' + y''^2\ ;\quad в)\ yy'' = y'^2\ ;\quad г)\ xyy'' + yy' - x^2y'^2 = 0.$

В.2. $а)\ y''' = x + \cos x\ ;\quad б)\ y'''x \ln x = y''\ ;\quad в)\ 4y^3 y'' = y^4 - 1\ ;$

$г)\ x^4 y^4 - x^3y'^2 + 2x^2yy'^2 - (3xy^2 + 2x^3)y' + 2x^2y + y^3 = 0\ .$

В.3. $а)\ y'' = x e^x\ ;\quad б)\ xy''' + y'' = 1\ ;\quad в)\ xy'' = y' \ln \left(\frac{y}{x}\right)\ ;\quad г)\ x^3y'' = (y - xy')^2\ .$

В.4. $а)\ y''(x + 2)^5 = 1\ ;\quad б)\ y'(1 + y'^2) = ay''\ ;\quad в)\ xy''' + y'' = x + 1\ ;\ г)\ y''y^3 + 1 = 0.$

В.5. $а)\ xy'' = y'\ ;\quad б)\ yy''^2 = 1\ ;\quad в)\ x^2 y'' + xy' = 1\ ;\ г)\ xyy'' - xy'^2 - yy' - bxy'^2\sqrt{a^2 - x^2} = 0$

В.6. $а)\ xy''' - y'' = 0\ ;\ б)\ tg\, xy'' - y' + 1/\sin x = 0\ ;\ в)\ y''y^3 + 4 = 0\ ;$

$г)\ x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}\ .$

В.7. $а)\ y''' = \sqrt{1 - y''^2}\ ;\quad б)\ y'''\,ctg\, 2x + 2y'' = 0\ ;\quad в)\ 3y'' = (1 + y'^2)^{3/2}\ ;$

$г)\ x^2yy'' = (y - xy')^2\ .$

В.8. $а)\ xy'' = y' + x^2\ ;\quad б)\ x^4y'' + x^3y' = 1\ ;\quad в)\ 1 + y'^2 = 2yy''\ ;$

$г)\ yy'' - y'^2 = yy'/\sqrt{1 + x^2}\ .$

В.9. $а)\ y'' = 1 + y'^2\ ;\quad б)\ xy''' - y'' + 1/x = 0\ ;\ в)\ 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0\ ;$

$г)\ xyy'' - xy'^2 - yy' = 0\ .$

В.10. $а)\ 2y'' = y'/x + x^2/y'\ ;\quad б)\ (1 + x^2)y'' + 2xy' = x^2\ ;\ в)\ 3y'y'' = e^y\ ;$

$г)\ x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0.$

8. Найти общее решение и решить задачу Коши для уравнений:

В.1. $а)\ y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}\ ;\quad б)\ y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)\ ;$

$в)\ y'' + \pi^2 y = \pi^2/\cos \pi x\ ,\quad y(0) = 3\ ,\ y'(0) = 0.$

В.2. $а)\ y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x\ ;\quad б)\ y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x;$

$в)\ y'' + 3y' = 9e^{3x}/(1 + e^{3x})\ ,\quad y(0) = \ln 4,\ \ y'(0) = 3(1 - \ln 2).$

В.3. $а)\ y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}\ ;\quad б)\ y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)\ ;$

$в)\ y'' + 4y = 8\,ctg\, 2x\ ,\quad y(\pi/4) = 5\ ,\ y'(\pi/4) = 4.$

В.4. $а)\ y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}\ ;\quad б)\ y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x\ ;$

в) $y'' - 6y' + 8y = 4/(1 + e^{-2x})$, $y(0) = 1 + 2\ln 2$, $y'(0) = 6\ln 2$.

В.5. *а)* $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$; *б)* $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$;

в) $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x}/(1 + e^{-3x})$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

В.6. *а)* $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}$; *б)* $y'' - 4y' + 8y = e^{x}(5\sin x - 3\cos x)$;

в) $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\sin \pi x$; $y(1/2) = 1$, $y'(1/2) = \pi^2/2$.

В.7. *а)* $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^{x}$; *б)* $y'' + 2y' = e^{x}(\sin x + \cos x)$;

в) $y'' + \dfrac{1}{\pi^2}y = \dfrac{1}{\pi^2\cos(x/\pi)}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

В.8. *а)* $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$; *б)* $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$;

в) $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$, $y(0) = 4\ln 4$, $y'(0) = 3(3\ln 4 - 1)$.

В.9. *а)* $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^{x}$; *б)* $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$;

в) $y'' + y = 4\,\mathrm{ctg}\, x$, $y(\pi/2) = 4$, $y'(\pi/2) = 4$.

В.10. *а)* $y''' - 3y' - 2y = -4xe^{x}$, *б)* $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$;

в) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2ч}}$, $y(0) = 1 + 3\ln 3$, $y'(0) = 10\ln 3$.

Индивидуальное задание №2.

1. Проинтегрировать систему последовательным интегрированием или методом исключения.

В.1) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = y \end{cases}$; В.2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 1 \end{cases}$; В.3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$;

В.4) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = 3y + 4z \end{cases}$; В.5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$; В. 6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$;

В.7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$; В.8) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2z \\ \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \end{cases}$; В.9) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -y \\ \dfrac{dx}{dt} = 0 \end{cases}$;

В.10) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z \end{cases}$.

2. Найти общее решение методом Эйлера.

В.1) $\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y + 4z \end{cases}$; В.2) $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z' = -6y - 3z \end{cases}$; В.3) $\begin{cases} y' = 2y - 3z \\ z' = 3y + 2z \end{cases}$;

В.4) $\begin{cases} y' = y - 2z \\ z' = 6y - 5z \end{cases}$; В.5) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y \\ \dot{y} = -4x - 4y \end{cases}$; В.6) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -10y - z \end{cases}$;

В.7) $\begin{cases} y' = -y + z \\ z' = -y - 3z \end{cases}$; В.8) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 4x - 3y \end{cases}$; В.9) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$; В.10) $\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = 10y - 4z \end{cases}$.

3. Проинтегрировать методом Даламбера.

В.1) $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases}$; В.2) $\begin{cases} \dot{x} = 6x - y \\ \dot{y} = 3x - 2y \end{cases}$; В.3) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 9y \\ \dot{y} = x + 8y \end{cases}$; В.4) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$;

В.5) $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$; В.6) $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$; В.7) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$; В.8) $\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$;

В.9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$; В.10) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = 4x - y \end{cases}$.

4. Решить систему, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям:

В.1) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$; $\begin{matrix} y(0) = 0 \\ z(0) = -1 \end{matrix}$; В. 2) $\begin{cases} y' = 3y - z \\ z' = 10y - 4z \end{cases}$; $\begin{matrix} y(0) = 1 \\ z(0) = 5 \end{matrix}$;

В.3) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$; $\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 3 \end{matrix}$; В.4) $\begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y \\ \dot{y} = 2x + 3y + t \end{cases}$; $\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{matrix}$;

В.5) $\begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = x + e^t \end{cases}$; $\begin{matrix} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{matrix}$; В.6) $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x + y} \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x + y} \end{cases}$; $\begin{matrix} x(0) = 2 \\ y(0) = 4 \end{matrix}$;

В.7) $\begin{cases} y' = 1 - \dfrac{1}{z} \\ z' = \dfrac{1}{y - x} \end{cases}$; $\begin{matrix} y(0) = -1 \\ z(0) = 1 \end{matrix}$; В.8) $\begin{cases} y' = -2y \\ z' = z \end{cases}$; $\begin{matrix} y(0) = 1 \\ z(0) = 0 \end{matrix}$

В.9) $\begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$; $y(0) = \dfrac{1}{2}$, $x(0) = 1$, $z(0) = \dfrac{1}{2}$; В.10) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -2y + 4z \end{cases}$; $y(0) = 0$, $z(0) = -1$.

5. Найти общее решение.

В.1) $\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x} \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x} \end{cases}$; В.2) $\begin{cases} y' = 2y - z + 2e^{x} \\ z' = 3y - 2z + 4e^{x} \end{cases}$;

В.3) $\begin{cases} y' = z - y - 2e^{-x} \\ z' = -6x + 4z - 4e^{-x} \end{cases}$; $\begin{matrix} y_1 = ae^{-x} \\ z_1 = be^{-x} \end{matrix}$; В.4) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 4\cos 2t \\ \dot{y} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t \end{cases}$;

В.5) $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t + \cos t \end{cases}$; В.6) $\begin{cases} y' = 2y + z - 4 \\ z' = y + 2z + 3x - 6 \end{cases}$; $\begin{matrix} y_1 = ax + b \\ z_1 = cx + d \end{matrix}$;

В.7) $\begin{cases} y' = 2y - z - \sin x \\ z' = 3y - 2z - \cos x \end{cases}$; $\begin{matrix} y_1 = a\cos x + b\sin x \\ z_1 = c\cos x + d\sin x \end{matrix}$; В.8) $\begin{cases} y' = 5y + 4z + e^{x} \\ z' = 4y + 5z + 1 \end{cases}$;

В.9) $\begin{cases} y' = -5y + 2z + 40e^{x} \\ z' = y - 6z + 9e^{-x} \end{cases}$; В.10) $\begin{cases} \dot{x} = y - \cos t \\ \dot{y} = -x + \sin t \end{cases}$.

6. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений.

В.1) $\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ z' = \dfrac{z - x}{x} \end{cases}$; В.2) $\begin{cases} y' = e^{x-y} \\ z' = \dfrac{2z}{2x - z^2} \end{cases}$; В.3) $\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{1 + x^2} y \\ z' = -\dfrac{1}{x} z + y + x \end{cases}$; В.4) $\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{z^2}{y} \end{cases}$;

В.5) $\begin{cases} y' = y + z \\ z' = -5y - 5z \end{cases}$; В.6) $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = \dfrac{dz}{\frac{1}{z}}$; В.7) $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{0} = \dfrac{dz}{z}$; В.8) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{0z} = dz$;

В.9) $\dfrac{dx}{mz - ny} = \dfrac{dy}{nx - lz} = \dfrac{dz}{ly - mx}$; В.10) $\begin{cases} y' = \dfrac{z + e^{y}}{z + e^{x}} \\ z' = \dfrac{z^2 - e^{x+y}}{z + e^{x}} \end{cases}$.

7. Используя определение устойчивости по Ляпунову исследовать на устойчивость решения уравнения:

В.1) $\dfrac{dx}{dt} = 2x + t, \quad x(0) = 1.$ В.2) $\dfrac{dx}{dt} = t(x - 1), \quad x(0) = 0.$

В.3) $\dfrac{dx}{dt} = x - t, \quad x(0) = 1.$ В.4) $\dfrac{dy}{dx} = y + x, \quad y(0) = 1.$

В.5) $\dfrac{dy}{dx} = x - y, \quad y(0) = -1.$ В.6) $\dfrac{dx}{dt} = 5 + t, \quad x(0) = 1.$

В.7) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{2} - t, \quad x(0) = 0.$ В.8) $\dfrac{dy}{dx} = x - 4, \quad y(0) = 1.$

В.9) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y, \quad y(0) = 0.$ В.10) $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1 + y), \quad y(0) = 0.$

8. Исследовать на устойчивость точку покоя (0;0) системы:

В.1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases},$ В.2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases},$ В.3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases},$

В.4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - y \end{cases},$ В.5) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases},$ В.6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases},$

В.7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 2y \end{cases},$ В.8) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases},$ В.9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases},$

В.10) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 2x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x \end{cases}.$